THE MACMILLAN COMPANY OF INDIA LTD
MADRAS CALCUTTA BOMBAY DELHI
Associate companies throughout the world



First Edition 1974

Made in India
Printed by B. Mukherji at Kalika Press Private Ltd.
25, D. L. Roy Street, Calcutta-6 and
Published by U. N. Banerjee, for The Macmillan Co. of India Ltd.
294, B. B. Ganguly Street, Calcutta-12

# ভূমিকা

পাঠ্যক্রমের পরিবর্তনের সঙ্গে নতুন নতুন পাঠ্যপুস্তক রচিত হইয়া থাকে। নব কলেবর ধারণ ব্যতীত পুস্তকের অভিনবত্ব অনেকাংশে নতুন পাঠ্যসূচীর উপর নির্ভর করে। সনাতনী পাঠ্যসূচীর আওতার মধ্যে দৃষ্টিভঙ্গীর নতুনত্বের জন্যও পাঠ্যপুস্তক নতুন রূপ পরিগ্রহ করিতে পারে। আবার পাঠ্যক্রমে বিষয়বস্তুর বিন্যাস এমন হইতে পারে যাহাতে মোটামুটিভাবে উপরোক্ত দুই প্রকারের অভিনবত্ব আংশিকভাবে পুস্তকে প্রতিফলিত হইতে দেখা যায়। একথা অনস্বীকার্য যে এইরূপ ক্ষেত্রে পুস্তক প্রণয়ন একটি দুরূহ কর্ম। তথাপি এই সংস্থা তাহার আদর্শানুযায়ী এই কার্যে ব্রতী হইয়াছে। মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ কর্তৃক প্রবর্তিত মাধ্যমিক পর্যায়ের নতুন পাঠ্যক্রমানুসারে এই সংস্থার অধীনে

ষষ্ঠ শ্রেণীর (১) গণিত-প্রকাশ, (২) জ্যামিতি-প্রবেশ

এবং নবম শ্রেণীর (৩) মাধ্যমিক গণিত, (৪) মাধ্যমিক জ্যামিতি

রচিত হইয়াছে। নতুন পাঠ্যক্রমে পুরাতনের তুলনায় কতখানি আধুনিকীকরণ সম্ভব হইয়াছে তাহা আলোচনাসাপেক্ষ। এই সংস্থার মূল উদ্দেশ্য বর্তমান কাঠামোর চৌহদ্দির মধ্যে গণিত শিক্ষার উৎকর্ষ সাধন করা। আলোচ্য পুস্তকগুলি এই আদর্শকে সার্থক রূপ দান করিবার একটি প্রচেষ্টা। 'গণিত-প্রকাশ' ও 'মাধ্যমিক গণিত' তথাকথিত পুরাতন পাঠ্যসূচীর ভিত্তিতে রচিত হইলেও ইহাদের বৈশিষ্ট্য আধুনিকতার নিরিখে পাটীগণিত ও বীজগণিতকে যাচাই করা এবং ইহাদের শিক্ষা যে জীবনের সহিত ওতপ্রোতভাবে জড়িত তাহা প্রত্যয়গ্রাহ্য করিয়া তোলা। এই পুস্তকসমূহে সমাজসচেতন, জীবনকেন্দ্রিক বিবিধ উদাহরণ ও প্রশ্নের মাধ্যমে গণিতশাস্ত্রের অবতারণা করা হইয়াছে। 'জ্যামিতি-প্রবেশ' নতুন জ্যামিতির পাঠ্যসূচীর ভিত্তিতে স্বাভাবিকভাবেই নব আঙ্গিকে প্রণয়ন করা হইয়াছে। নতুন ভাবধারার নির্যাসটুকুও এই গ্রন্থে স্বজ্ঞাত (intuitive) সক্রিয়তার (activity) মাধ্যমে ফোটাইবার চেষ্টা করা হইয়াছে। আপাতদৃষ্টিতে নবম শ্রেণীর পাঠ্যসূচীতে কোন ভাবগত বৈশিষ্ট্য পরিলক্ষিত না হইলেও নবম শ্রেণীর 'মাধ্যমিক জ্যামিতি' পুস্তকে বিষয়বস্তুর মূল সুরটি সুপরিচিত ও চিরাচরিত বিষয়বস্তুর মারফত প্রস্ফুটিত করিয়া তোলার চেষ্টা করা হইয়াছে।

পশ্চিমবঙ্গে এই ধরনের প্রয়াস সম্পূর্ণ অভিনব। এতদিন একক বা যৌথভাবে পুস্তক প্রণয়ন করা হইয়াছে। সংস্থার বেশ কয়েকজন অভিজ্ঞ গণিতশাস্ত্রে পারঙ্গম, নতুন চিন্তাধারার সঙ্গে পরিচিত সর্বস্তরের শিক্ষকদের সম্মিলিত চিন্তা ও প্রয়াসের ফল এই পুস্তকগুলি। এই সংস্থার অনেক সদস্য প্রত্যক্ষ ও পরোক্ষভাবে এই পুস্তকগুলি রচনায় অংশগ্রহণ করিয়াছেন। প্রত্যেক পুস্তক রচনার ভার বিভিন্ন লেখক-গোষ্ঠীর উপর ন্যস্ত ছিল। মূল ও প্রাথমিক রচনা এই বিভিন্ন গোষ্ঠী কর্তৃক বিশেষভাবে আলোচিত হয়। এইজাতীয় আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে মূল রচনাগুলির পরিবর্তন ও পরিবর্জন করা হইয়াছে।

পুস্তকগুলি রচনায় অংশগ্রহণ করিয়াছেন শ্রীসত্যেন্দ্রনাথ গিরি, শ্রীবিভাস গুহ, শ্রীসমীর বসু, শ্রীপরিতোষ বসু, শ্রীঅরূপ বন্দ্যোপাধ্যায়, শ্রীস্বপনকুমার চট্টোপাধ্যায়, শ্রীশ্যামলকুমার চট্টোপাধ্যায়, শ্রীবিমলেন্দু দাস, শ্রীসুচিত্র বিমল ঘোষ, শ্রীমতী ভারতী ব্যানার্জী, শ্রীমতী শ্যামলী মুখোপাধ্যায়, শ্রীমতী ঝর্ণা দত্ত, শ্রীমতী স্বপ্না দত্ত, শ্রীপ্রাণবল্লভ সাহা, শ্রীআনোয়ারুল হক, শ্রীমধুসূদন ভট্টাচার্য শ্রীমতী বেলা ঘোষ, ও শ্রীমতী অরুন্ধতী ব্যানার্জী। ইঁহাদের অক্লান্ত, নিরলস, নিরবচ্ছিন্ন ও সক্রিয় প্রচেষ্টার ফলেই এত অল্প সময়ে এই পুস্তকগুলি প্রকাশ করা সম্ভব হইয়াছে। এইজন্য ইঁহারা সকলেই বিশেষভাবে আমাদের সংস্থার ধন্যবাদার্হ।

সম্পাদকমণ্ডলীর সদস্যরূপে ডক্টর দিলীপকুমার সিন্‌হা ( যাদবপুর বিশ্ব-বিদ্যালয় ), ডক্টর বীরেশ্বর রায়চৌধুরী ( বালীগঞ্জ গভর্নমেণ্ট স্কুল ), ডক্টর অমিয়ভূষণ রায় (যাদবপুর বিশ্ববিদ্যালয়) ও শ্রীমতী উমা কুশারী ( বিদ্যাভারতী, নিউ আলিপুর ) অনেক অমূল্য সময় নষ্ট করিয়া আমাদের সংস্থাকে কৃতজ্ঞতাপাশে আবদ্ধ করিয়াছেন। আমাদের প্রকাশক ও তাঁহাদের কর্মীবৃন্দকে এই সুযোগে ধন্যবাদ জ্ঞাপন করিতেছি, কারণ এই কর্মযজ্ঞে তাঁহাদেরও অবদান অনেক।

পরিশেষে, আমাদের সংস্থা আশা করে, সমগ্র শিক্ষকসমাজ ও ছাত্রসমাজে এই পুস্তকগুলি সমাদৃত হইবে। পুস্তকের সমৃদ্ধি ও উৎকর্ষের জন্য কোন প্রকার উপদেশ বা বক্তব্য আমরা সাদরে গ্রহণ করিব। ইতি

25, ফার্ণ রোড, কলিকাতা-29
30 জানুয়ারী, 1974

সাধারণ সচিব
এ. আই. এম. টি.
**A. I. M. T. (Calcutta)**

# SYLLABUS IN MATHEMATICS

## Class IX

### Geometry & Mensuration

**Geometry**

1. To establish the following properties:

(*a*) The opposite sides and angles of a parallelogram are congruent. Each diagonal divides the parallelogram into congruent triangles and diagonals bisect one another.

(*b*) A quadrilateral is a parallelogram if

(*i*) both pairs of opposite sides are congruent

or (*ii*) both pairs of opposite angles are congruent

or (*iii*) one pair of opposite sides is congruent and parallel

or (*iv*) its diagonals bisect one another.

(*c*) If there are three or more parallel lines and the intercepts made by them on any one line that cuts them are congruent, then the corresponding intercepts on any other line that cuts them are also congruent.

(*d*) The line drawn through the middle point of one side of a triangle parallel to another side bisects the third side and is equal to half of the second side. The line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and equal to half of it.

(*e*) The formal proof should be preceded by activities such as paper folding, paper cutting in all the cases of this paragraph.

(*i*) Parallelograms on the same base and between the same parallels ( or, of the same altitude ) are equal in area.

(*ii*) Triangles on the same base ( or, on equal

bases ) and between the same parallels ( or, of same altitude ) are equal in area.

(*iii*) Equal ( in area ) triangles on the same base and on the same side of it are between the same parallels.

(*iv*) If a triangle and a parallelogram stand on the same base and between the same parallels, the area of the triangle is half that of the parallelogram.

(f) (*i*) The perpendiculars drawn to the sides of a triangle from their middle points are concurrent.

(*ii*) The bisectors of the angles of a triangle are concurrent.

(*iii*) The mediums of a triangle are concurrent.

2. Pythagoras' Theorem—Dissection method (No formal proof ).

3. Constructions :

(*i*) Construction of a parallelogram equal in area to a given triangle and having one of its angles congruent to a given angle.

(*ii*) Construction of a triangle equal in area to a given rectilinear figure.

**Mensuration**

Perimeter and Area of a Rectangle, Square, Triangle ; Circumference and Area of a Circle.

# সূচীপত্র


| বিষয় | | পৃষ্ঠা |
|---|---|---|
| **সূচনা** | | |
| **প্রথম অধ্যায়** | | |
| 1. জ্যামিতিক প্রমাণের পদ্ধতি | ... | 3 |
| 2. সর্বসমতা ও সমতা | ... | 4 |
| 3. পূর্বপাঠের আলোচনা | ... | 6 |
| **দ্বিতীয় অধ্যায়** | | |
| 1. চতুর্ভুজের প্রকারভেদ | ... | 13 |
| 2. সামান্তরিকের ধর্ম | ... | 15 |
| **তৃতীয় অধ্যায়** | | |
| 1. সমান্তরাল সরলরেখা সম্বন্ধীয় উপপাদ্য | ... | 21 |
| 2. সমবিন্দু সম্পর্কিত উপপাদ্য | ... | 25 |
| **চতুর্থ অধ্যায়** | | |
| 1. ক্ষেত্রফল সম্বন্ধীয় উপপাদ্য | ... | 31 |
| 2. পীথাগোরাসের উপপাদ্য | ... | 44 |
| **পঞ্চম অধ্যায়** | | |
| নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ বা চতুর্ভুজ অঙ্কন | ... | 53 |
| **ষষ্ঠ অধ্যায়** | | |
| পরিমিতি | ... | 58 |
| ত্রিভুজ, বর্গক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল | | |
| বৃত্তের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল | | |

এই পুস্তকে নিম্নলিখিত সঙ্কেতগুলি ব্যবহৃত হইবে ঃ

| সঙ্কেত | অর্থ |
| --- | --- |
| $=$ | সমান |
| $\neq$ | অসমান |
| $\odot$ | বৃত্ত |
| ▱ | সামান্তরিক |
| $\triangle$ | ত্রিভুজ |
| $\therefore$ | অতএব |
| $\because$ | যেহেতু |
| $>$ | বৃহত্তর |
| $<$ | ক্ষুদ্রতর |
| $\parallel$ | সমান্তরাল |
| $\perp$ | লম্ব |
| $\cong$ | সর্বসম |

# সূচনা

"জ্যামিতি" শব্দটি ইংরেজী Geometry শব্দের আক্ষরিক অনুবাদ। মূল গ্রীক শব্দ 'Geo' কথাটির অর্থ পৃথিবী আর "Metry" কথাটির অর্থ দাঁড়ায় পরিমাপ করা। পুরো শব্দটির ব্যুৎপত্তিগত অর্থ দাঁড়ায় পৃথিবীর মাপ কষা। প্রাচীন ভারতে যাগযজ্ঞকল্পে, হোমের আয়োজনে এবং বিবিধ ধর্মসংশ্লিষ্ট কর্মে পুরোহিতগণ বৃত্তাকার পথে নিজেদের গণ্ডী কাটিতেন। মিশরীয় সভ্যতার উত্তরণের ইতিহাসেও এমন সাক্ষ্য পাওয়া যায় যে, নীল নদের উপকূলের প্রান্তবর্তী গ্রামে ভূমি বণ্টনের সময় নানান্ জ্যামিতিক আকারের সাহায্য লওয়া হইত। তখন পর্যন্ত শুধুমাত্র উন্নতিশীল জাতির কিংবা প্রাচীন ভাবধারামণ্ডিত ক্রিয়াকর্মে কিছু জ্যামিতিক আকারের ব্যবহার অস্পষ্টভাবে প্রচলিত ছিল। গ্রীসদেশের থেলস [ খৃঃ পূঃ-624-547 ], পীথাগোরাস [ খৃঃ পূঃ-548-495 ? ] প্রমুখ বিজ্ঞানীরা 'জ্যামিতি'কে একটি শাস্ত্রের রূপ দিলেন। তাঁহাদের সংজ্ঞা অনুযায়ী রেখা, ক্ষেত্র, ঘন ইত্যাদি বিষয়ক গণিতের শাখাকেই জ্যামিতি বলা হয়। সমসাময়িককালে প্রাচীন ভারতের হিন্দু গণিতজ্ঞ আর্যভট্ট পীথাগোরাসের উপপাদ্যের অনুরূপ একটি উপপাদ্য প্রকাশ করেন। সেটিও স্বনামে বিখ্যাত। প্রথমতঃ গ্রীক বিজ্ঞানী ইউক্লিড ( আনুমানিক খৃঃ পূঃ—300 ) পূর্ব প্রকাশিত সমস্ত তত্ত্ব ও উপপাদ্যসমূহকে একটি সামগ্রিক ও সুবিন্যস্ত রূপ দিবার চেষ্টা করেন। ইহার জন্য তাঁহাকে কতকগুলি মৌলিক প্রস্তাবকে স্বতঃসিদ্ধ হিসাবে ধরিতে হয় এবং উহাদের উপর ভিত্তি করিয়া বিভিন্ন যুক্তির মাধ্যমে একটি কাঠামো তৈরী করিতে হয়। জ্যামিতি তাই স্বীকৃত গাণিতিক যুক্তিবিজ্ঞান। রেখা, তল, ঘন, ত্রিভুজ—এগুলি জ্যামিতির কল্পনামাত্র। ইহাদের লইয়াই তৈরী হইয়াছে সনাতনী ইউক্লিডীয় জ্যামিতি। ইউক্লিডের প্রামাণ্য গ্রন্থের নাম 'Elements' এবং ইহা তেরটি খণ্ডে বিভক্ত ছিল। ইউক্লিডের 'Elements'-এর তেরটি সম্ভারে বিষয়বস্তু এইরূপ ছিল :

| | |
|---|---|
| প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ | দ্বি-মাত্রিক জ্যামিতি ( Plane Geometry ) |
| পঞ্চম— | অনুপাত ( Theory of Proportion ) |
| ষষ্ঠ— | সদৃশ চিত্রের জ্যামিতি (Geometry of similar figures) |

| | |
|---|---|
| সপ্তম<br>অষ্টম<br>নবম | সংখ্যাতত্ত্ব এবং পাটীগণিত (Theory of numbers and Arithmetic) |
| দশম— | অমেয় সংখ্যাতত্ত্ব ( Theory of incommensurables ) |
| একাদশ<br>দ্বাদশ | পিরামিড, প্রিজম্, শঙ্কু, গোলক ইত্যাদি ত্রিমাত্রিক বস্তুর নানা ধর্ম (Elementary theorems and metrical relations of the pyramid, prism, cone, cylinder, sphere etc. ) |
| ত্রয়োদশ— | সুষম বহুভুজ ও বহুতলবিশিষ্ট ত্রিমাত্রিক ঘনবস্তুর ধর্ম ( Properties of regular polygons and regular solids. ) |

এই গ্রন্থের বিষয়বস্তু সম্পর্কে ইউক্লিডের স্বকীয় অবদান কতখানি তাহা সঠিকভাবে নিরূপণ করা কঠিন। তবে, একথা বলা যায় যে এই গ্রন্থেই ইউক্লিড তাঁহার পূর্বসূরীদের দ্বারা সৃষ্ট গণিতশাস্ত্রের একটি সুসংহত সংকলনের প্রয়াসী হইয়াছিলেন।

আমাদের পাঠ্যক্রম প্রধানতঃ ইউক্লিডীয় জ্যামিতির মধ্যেই সীমাবদ্ধ থাকিবে। কালক্রমে ইউক্লিডীয় জ্যামিতিতে বহু অসঙ্গতি ও অসম্পূর্ণতা ধরা পড়ে। ইহা ছাড়াও বহু বিজ্ঞানী, যুক্তির সামঞ্জস্য বজায় রাখিয়া মৌলিক স্বতঃসিদ্ধকে ইচ্ছামত রদবদল করিয়া সম্পূর্ণ নূতন জ্যামিতির উদ্ভাবন করেন। আধুনিক জ্যামিতিতে জার্মান বিজ্ঞানী মরিস প্যাস ( Morish Pasch ), ইতালীয় বিজ্ঞানী পিয়ানো ( G. Peano ), ইতালীয় বিজ্ঞানী স্যাকারি ( Saccheri, 1667-1733 ), জার্মান বিজ্ঞানী গাউস্ ( Gauss K. F., 1777-1855), রুশ বিজ্ঞানী লোবাচেভস্কি (Lobachevski, 1793-1856), জার্মান বিজ্ঞানী হিলবার্ট ( Hilbert, 1862-1946 ), জার্মান বিজ্ঞানী রিম্যান ( Riemann, 1826-1866 ), রুশ বিজ্ঞানী বোলাই ( Bolyai, 1802-1860 ), বিজ্ঞানী ফেলিক্স ক্লাইন ( Felix Klein, 1849-1925 ) প্রমুখ বিজ্ঞানীদের নাম উল্লেখ্য। তাঁহাদের মধ্যে অনেক বিজ্ঞানী জ্যামিতিকে তিন মাত্রার মধ্যে সীমিত না করিয়া চতুর্মাত্রিক জ্যামিতি সৃষ্টি করিয়া জ্যামিতিশাস্ত্রকে একটি বস্তুবাদী দেশের রূপ বিচারে সহায়ক হন। ইহার কথা তোমরা পরে জানিবে।

# প্রথম অধ্যায়

## জ্যামিতিক প্রমাণের পদ্ধতি, সর্বসমতা ও পূর্বপাঠের আলোচনা

### 1. জ্যামিতিক উপপাদ্য প্রমাণের পদ্ধতি

তোমরা ইতিপূর্বে অষ্টম শ্রেণীতে কয়েকটি জ্যামিতিক উপপাদ্য প্রমাণ করিয়াছ। উপপাদ্য বলিতে কোন জ্যামিতিক তথ্য প্রমাণ বিষয়ক প্রস্তাব বুঝায়। তোমরা লক্ষ্য করিয়াছ, জ্যামিতিক উপপাদ্য প্রমাণ করিবার একটি সুনির্দিষ্ট পদ্ধতি আছে। প্রমাণ করিবার সময়ে প্রথমে কতকগুলি মৌলিক সত্য মানিয়া লইতে হয়। প্রত্যেকে তাহাদের সহজ জ্ঞান ও কল্পনা দ্বারা উহাদের সত্যতা উপলব্ধি করিতে পারে। এই মৌলিক সত্যগুলিকে **স্বতঃসিদ্ধ** বলা হয়। স্বতঃসিদ্ধগুলিকে যুক্তি দ্বারা প্রমাণ না করিয়া সহজ সত্য বলিয়া ধরা হয়। উদাহরণ স্বরূপ নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধের কথা উল্লেখ করা যাইতে পারে।

'দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখার উভয়েই তৃতীয় কোন সরলরেখার সমান্তরাল হইতে পারে না।'

উপপাদ্যটি সাধারণভাবে উল্লেখ করাকে **সাধারণ নিবচন** বলা হয়। সাধারণ নির্বচনে কিছু অংশ স্বীকার করিয়া লওয়া হয়, তাহাকে **কল্পনা** বলে। আবার ঐ কল্পনাকে ভিত্তি করিয়া যাহা প্রমাণ করিতে হয় তাহাকে **সিদ্ধান্ত** বলা হয়। সাধারণ নির্বচনের বিষয়বস্তুকে চিত্রের সাহায্যে বিশদভাবে বর্ণনা করাকে **বিশেষ নির্বচন** বলা হয়। উপপাদ্য প্রমাণ করিবার নিমিত্ত সাধারণ নির্বচন অনুযায়ী জ্যামিতিক চিত্র **অঙ্কন** করা প্রয়োজন হয় ও ক্ষেত্রবিশেষে **অতিরিক্ত অঙ্কন**ও প্রয়োজন হয়।

জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কন করিবার পর কল্পনা অনুযায়ী স্বীকৃত সিদ্ধান্ত ও স্বতঃসিদ্ধসমূহের সাহায্যে জ্যামিতিক সত্য প্রমাণের জন্য যুক্তির অবতারণা করা হয়। এক্ষেত্রে পূর্বে প্রমাণিত উপপাদ্যসমূহকে প্রয়োজনবোধে স্বীকার করিয়া লওয়া হয়। আলোচ্য জ্যামিতিক সত্য প্রমাণের জন্য স্বীকৃত সিদ্ধান্ত, স্বতঃসিদ্ধ ও পূর্বে প্রমাণিত উপপাদ্যসমূহের সাহায্য লইতে হয়। যথাস্থানে উহাদের উল্লেখ করিয়া মূল সিদ্ধান্তটি প্রমাণ করা হয়।

আবার মূল সিদ্ধান্ত প্রমাণিত হইলে উহা হইতে যদি সহজে অন্য কোন সিদ্ধান্ত অনুমিত হয়, তাহা হইলে ঐ অনুমিত সিদ্ধান্তকে **অনুসিদ্ধান্ত** বলা হয়।

সুতরাং দেখা যাইতেছে, উপপাদ্য প্রমাণ করিতে হইলে নিম্নলিখিত বিষয়গুলির দিকে দৃষ্টি দিতে হইবে।

(1) প্রথমে কি স্বীকার করিয়া লওয়া হইয়াছে এবং কি প্রমাণ করিতে হইবে, তাহা সম্যক্‌ভাবে উপলব্ধি করিতে হইবে।

(2) এখন যে সর্তগুলি দেওয়া আছে, সেই সর্ত অনুযায়ী জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কন করিতে হইবে।

(3) ঐ জ্যামিতিক চিত্রে কি দেওয়া আছে ও কি প্রমাণ করিতে হইবে তাহা উল্লেখ করিতে হইবে।

(4) প্রয়োজন হইলে জ্যামিতিক চিত্রে অতিরিক্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

(5) অঙ্কন-প্রণালী পরিষ্কারভাবে বুঝাইয়া বলিতে হইবে।

(6) এখন জ্যামিতিক সত্যটি প্রমাণ করিবার জন্য কোন্ কোন্ স্বতঃসিদ্ধ, পূর্বে প্রমাণিত উপপাদ্য ও অনুসিদ্ধান্তগুলি প্রয়োজন তাহা ঠিক করিতে হইবে।

(7) পরিশেষে যথাস্থানে যথোপযুক্ত যুক্তির সাহায্যে স্বতঃসিদ্ধ, উপপাদ্য, অনুসিদ্ধান্ত ইত্যাদি ব্যবহার করিয়া উপপাদ্যটি কিভাবে প্রমাণ হইল, তাহা লিখিত হইবে।

## 2. সর্বসমতা ও সমতা

সর্বসম চিত্র বলিতে সাধারণভাবে আমরা বুঝি যে চিত্র দুইটি সব দিক হইতে সমান। একটু গভীরভাবে ভাবিলে তোমরা বুঝিবে যে সর্বসম চিত্রদ্বয়ের একটিকে অপরটিতে রূপান্তরিত করিলে কিছু কিছু জ্যামিতিক ধর্ম অপরিবর্তিত থাকে।

(1) প্রথম চিত্রে যে কোন দুই বিন্দুর দূরত্ব রূপান্তরিত চিত্রের অনুরূপ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বের সমান হইবে। (2) প্রথম চিত্রের যে কোন দুইটি সরল রেখার মধ্যে কোণের পরিমাণ রূপান্তরিত চিত্রের অনুরূপ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে কোণের পরিমাণের সমান হইবে। (3) প্রথম চিত্রের একটি সরলরেখায় অবস্থিত একটি বিন্দু যদি ঐ সরলরেখায় অবস্থিত অপর দুইটি বিন্দুর মধ্যে অবস্থিত হয় তবে রূপান্তরিত চিত্রে প্রথম বিন্দুর অনুরূপ বিন্দুও অপর অনুরূপ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে। (4) প্রথম চিত্রে তিনটি বিন্দু যদি

সমরেখ হয়, তবে রূপান্তরিত চিত্রে অনুরূপ বিন্দুত্রয়ও সমরেখ হইবে। এই দুইটি চিত্রের একটিকে অপরটির সহিত সর্বসম বলা হয়।

মনে কর, AB সরলরেখা রূপান্তরের ফলে A′B′-তে রূপান্তরিত হইল এবং তাহার পূর্বোক্ত ধর্মগুলি বজায় থাকিল। এখন AB ও A′B′ সর্বসম হইবে। সর্বসমতাকে $\simeq$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। AB ও A′B′ সর্বসম বুঝাইতে আমরা লিখি $AB \simeq A'B'$। এখানে AB সরলরেখার যে কোন দুই বিন্দুর রৈখিক দূরত্ব উহার যে কোন তিনটি বিন্দুর সমরেখতা ( Collinearity ) ও ও অন্তর্বর্তিতা ( betweenness ) ইত্যাদি ধর্ম এই রূপান্তরের দ্বারা অপরিবর্তিত থাকে। $AB = A'B'$ বুঝাইতে আমরা কেবলমাত্র রৈখিক পরিমাপের সমতার কথা বলিয়া থাকি। কিন্তু $AB \simeq A'B'$ বুঝাইতে আমরা অনুরূপ রূপান্তরের মাধ্যমে উহাদের পরিমাণগত ও গুণগত উভয়বিধ অভিন্নতার কথা বুঝাইয়া থাকি।

আবার ABC ত্রিভুজকে A′B′C′ ত্রিভুজে রূপান্তরিত করিলে যদি ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হয়, সে ক্ষেত্রে একটি ত্রিভুজের উপরিস্থ যে কোন দুইটি বিন্দুর মধ্যে রৈখিক দূরত্ব একই থাকিবে। চিত্র দুইটিতে সমরেখতা ও অন্তর্বর্তিতা ধর্মও অপরিবর্তিত থাকিবে। তাছাড়া ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ অন্য ত্রিভুজটিতে অনুরূপ বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সহিত সর্বসম হইবে। উভয়ক্ষেত্রে ক্ষেত্রফল ও পরিসীমাও অভিন্ন থাকে। এইক্ষেত্রে সংকেতের সাহায্যে লেখা হয়, $\triangle ABC \simeq \triangle A'B'C'$। অনুরূপভাবে যদি $\angle PQR$ এবং $\angle LMN$ সর্বসম হয়, তাহা হইলে লেখা হয় $\angle PQR \simeq \angle LMN$।

তাহা হইলে বুঝিতে পারিতেছ, সর্বসম ধর্মটি প্রতিষ্ঠিত করিতে হইলে একটি চিত্রকে অপর চিত্রে রূপান্তরিত করা প্রয়োজন, যাহাতে উপরোক্ত ধর্মগুলি অপরিবর্তিত থাকে। আমরা দেখিতেছি, রূপান্তরের মাধ্যমে দৈর্ঘ্য বা দূরত্বের পরিমাপগত সমতা অপরিবর্তিত থাকিতেছে, উপরন্তু আরও কিছু ধর্মও অপরিবর্তিত থাকিতেছে।

সমতা কেবল চিত্রদ্বয়ের পরিমাপগত সমতার কথা প্রকাশ করে। আবার সর্বসমতা চিত্রদ্বয়ের পরিমাণগত ও গুণগত বিভিন্ন ধর্মের অভিন্নতা প্রকাশ করে, তাই সর্বসমতাকে আমরা সমতা অপেক্ষা অনেক ব্যাপক অর্থে ব্যবহার করিতে পারি।

## 3. পূর্বপাঠের আলোচনা

পূর্বে তোমরা সক্রিয়তার ( activity ) ভিত্তিতে কতকগুলি জ্যামিতিক ধর্মের সহিত পরিচিত হইয়াছ। সর্বসমতার নূতন সংজ্ঞা বা ধারণার পরিপ্রেক্ষিতে যে জ্যামিতিক ধর্মের সঙ্গে তোমরা পরিচিত আছ, সেগুলি নিম্নলিখিতভাবে বলা যাইতে পারে :

(ক) একটি সরলরেখা অন্য একটি সরলরেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে যে সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

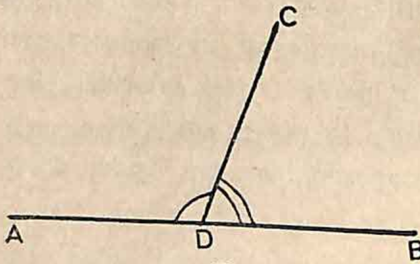


Fig. 1

চিত্রে AB ও CD সরলরেখা D বিন্দুতে মিলিত হইলে ∠ADC + ∠CDB = দুই সমকোণ হইবে।

(খ) দুইটি সন্নিহিত কোণের যোগফল দুই সমকোণের সমান হইলে উহাদের সাধারণ বাহু ব্যতীত অপর বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

পূর্বের চিত্রে যদি ∠ADC + ∠CDB = দুই সমকোণ হয়, তবে AD ও DB একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

(গ) একটি সরলরেখা অন্য দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি দুই দুইটি অনুরূপ কোণ পরস্পর সর্বসম হয়, তবে সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইবে।

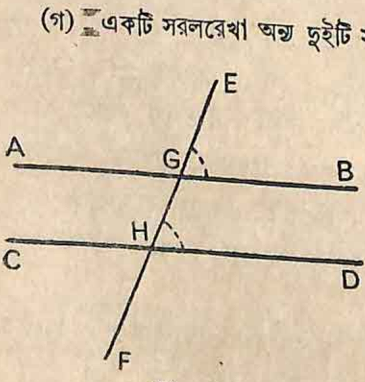


Fig. 2

চিত্রে AB ও CD দুইটি সরলরেখাকে EF সরলরেখা যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন ∠EGB ≃ ∠GHD হইলে, AB ও CD সমান্তরাল হইবে।

(ঘ) দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা উভয়ে একই সঙ্গে তৃতীয় সরলরেখার

সহিত সমান্তরাল হইতে পারে না।

AB ও CD দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা, উভয়ে একই সঙ্গে তৃতীয় PQ সরলরেখার সহিত সমান্তরাল হইতে পারে না।

এখানে PQ, AB-এর সহিত সমান্তরাল, কিন্তু CD-এর সহিত সমান্তরাল নয়।

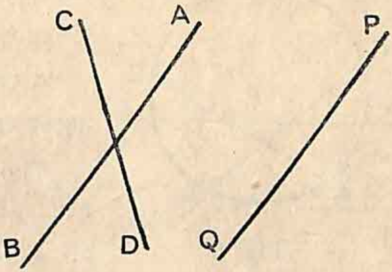


Fig. 3

(ঙ) একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণ অন্য একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণের সর্বসম হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

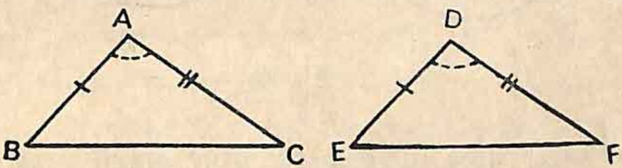


Fig. 4

$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$-এর $AB \simeq DE$, $AC \simeq DF$ ও $\angle BAC \simeq \angle EDF$ হইলে, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম হইবে, অর্থাৎ $\triangle ABC \simeq \triangle DEF$; ত্রিভুজের সর্বসমতার এই সর্তকে 'বাহু-কোণ-বাহু' ( Side-Angle-Side বা সংক্ষেপে SAS) বলা হয়।

(চ) একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও অন্য একটি বাহু অন্য একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও অনুরূপ বাহুর সহিত সর্বসম হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$-এর $\angle A \simeq \angle D$ ও $\angle B \simeq \angle E$ এবং $BC \simeq EF$ হইলে $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম হইবে। ত্রিভুজের সর্বসমতার এই সর্তকে 'কোণ-কোণ-বাহু' ( Angle-Angle-Side বা সংক্ষেপে AAS ) বলা হয়।

(ছ) একই বৃত্তে সর্বসম জ্যাসমূহের দ্বারা ছিন্ন চাপগুলি সর্বসম। নিম্নের বৃত্তে

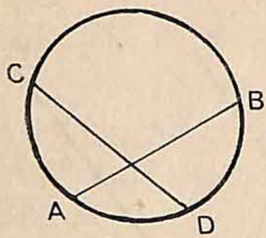



Fig. 5

জ্যা AB ও CD দ্বারা ছিন্ন ADB ও DAC চাপদ্বয় পরস্পর সর্বসম।

আবার, সর্বসম বৃত্তগুলির সর্বসম জ্যা-সমূহের দ্বারা ছিন্ন চাপগুলি সর্বসম।

সমব্যাসার্ধবিশিষ্ট নিম্নস্থ সর্বসম বৃত্ত দুইটিতে সর্বসম দুইটি জ্যা AB ও CD দ্বারা উৎপন্ন চাপ দুইটি APB ও CQD সর্বসম।

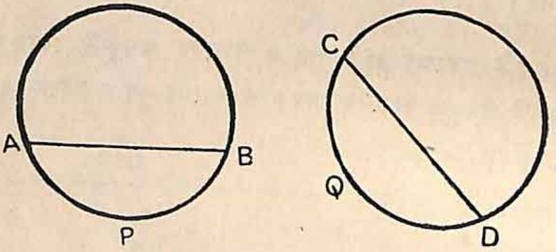



Fig. 6

বিপরীতক্রমে, সর্বসম জ্যাসমূহের দ্বারা উৎপন্ন চাপগুলি সর্বসম হইলে বৃত্তগুলিও সর্বসম হইবে।

নিম্নলিখিত জ্যামিতিক উপপাদ্যগুলিও তোমরা পূর্বে প্রমাণ করিয়াছ :

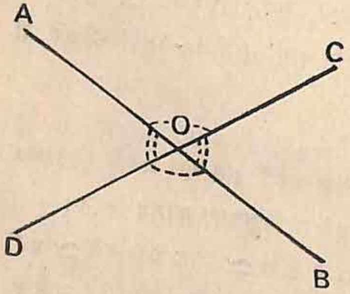



Fig. 7

(1) দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে।

AB ও CD সরলরেখা দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করিলে $\angle AOC \simeq \angle DOB$ এবং $\angle AOD \simeq \angle COB$ হইবে।

(2) একটি সরলরেখা অন্য দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি একান্তর কোণগুলি পরস্পর সর্বসম হয় তবে সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইবে।

AB ও CD সরলরেখাদ্বয়কে EF সরলরেখা যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন ∠AGH ≃ ∠DHG হইলে, AB ও CD সমান্তরাল হইবে।

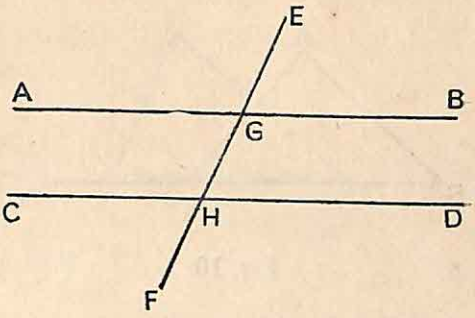


Fig. 8

(3) একটি সরলরেখা অন্য দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুইটির যোগফল দুই সমকোণের সমান হয় তবে সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইবে। চিত্রে (Fig. 8) ∠BGH + ∠GHD = দুই সমকোণ হইলে AB ও CD সমান্তরাল হইবে।

(4) একটি সরলরেখা অন্য দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে,

(ক) দুইটি অনুরূপ কোণ পরস্পর সর্বসম হইবে,

(খ) দুইটি একান্তর কোণ পরস্পর সর্বসম হইবে, ও

(গ) একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুইটির যোগফল দুই সমকোণ হইবে।

পূর্বের চিত্রে (Fig. 8) AB ও CD সমান্তরাল হইলে,

(ক) ∠EGB ≃ ∠GHD, ∠BGH ≃ ∠DHF

(খ) ∠AGH ≃ ∠DHG, ∠BGH ≃ ∠CHG

এবং (গ) ∠BGH + ∠GHD = দুই সমকোণ = ∠AGH + ∠GHC

(5) যে কোন ত্রিভুজের কোণগুলির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

△ABC-এ ∠A + ∠B + ∠C = দুই সমকোণ।

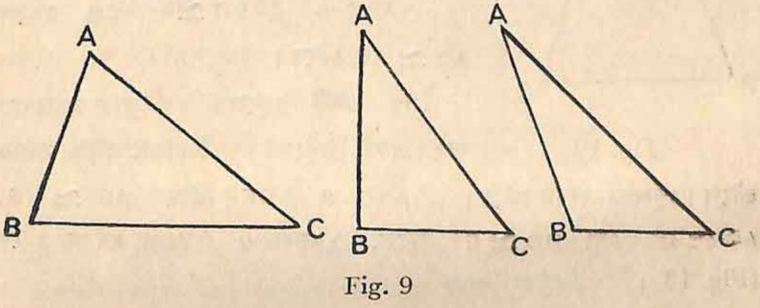


Fig. 9

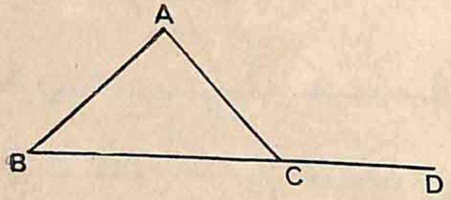



Fig. 10

(6) একটি ত্রিভুজের কোন বাহুকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ দূরবর্তী কোণ দুইটির সমষ্টির সমান হইবে।

পার্শ্বস্থ চিত্রে ∠ACD =∠CAB+∠ABC হইবে।

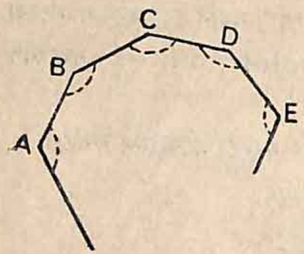



Fig. 11

(7) $n$ বাহুবিশিষ্ট একটি বহুভুজের কোণের সমষ্টি $2n-4$ সমকোণ হইবে।

ABCDE············একটি $n$ বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের ∠A+∠B+∠C+∠D+∠E+······ =$2n-4$ সমকোণ হইবে।

(8) যদি ত্রিভুজের দুইটি বাহু সর্বসম হয়, তাহা হইলে উহাদের বিপরীত কোণদ্বয় সর্বসম হইবে।

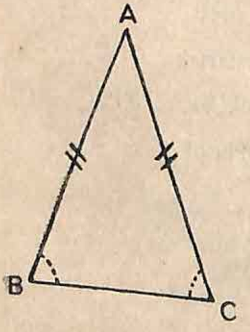



Fig. 12

△ABC-এ AB ≃ AC হইলে ∠ACB ≃ ∠ABC,

বিপরীতক্রমে, একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ সর্বসম হইলে উহাদের বিপরীত বাহুদ্বয় সর্বসম হইবে।

△ABC-এ ∠ABC ≃ ∠ACB হইলে AC ≃ AB হইবে।

(9) একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সহিত সর্বসম হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে। △ABC ও △DEF ত্রিভুজে AB ≃ DE, AC ≃ DF এবং BC ≃ EF হইলে, △ABC ও △FDE সর্বসম হইবে (Fig. 13)।

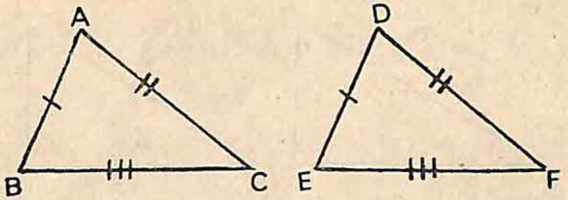



Fig. 13

ত্রিভুজের সর্বসমতার এই সর্তকে ‘বাহু-বাহু-বাহু’ (Side-Side-Side বা সংক্ষেপে SSS ) বলা হয়।

(10) একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু অসমান হইলে বৃহত্তর বাহুর সম্মুখীন কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর সম্মুখীন কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

△ABC-এ AB, AC অপেক্ষা বৃহত্তর, ∴ ∠ACB, ∠ABC অপেক্ষা বৃহত্তর।

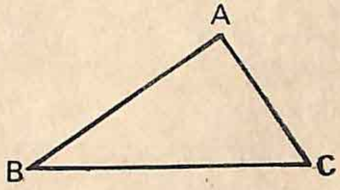



Fig. 14

(11) ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর যোগফল তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

পূর্বের ত্রিভুজে AB ও AC-এর যোগফল BC অপেক্ষা বৃহত্তর।

(12) বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর টানা রেখাংশগুলির মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

OP, AB-এর উপর লম্ব। OP রেখাংশ OQ, OR, OS প্রভৃতি প্রত্যেকটির অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

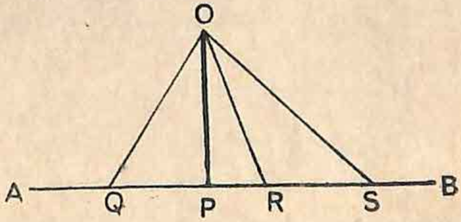



Fig. 15

(13) একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহুর সহিত সর্বসম হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

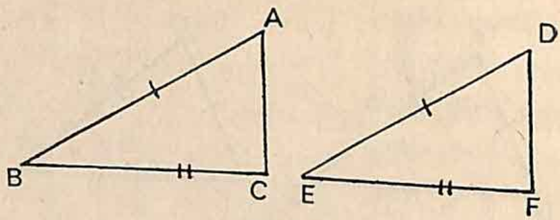



Fig. 16

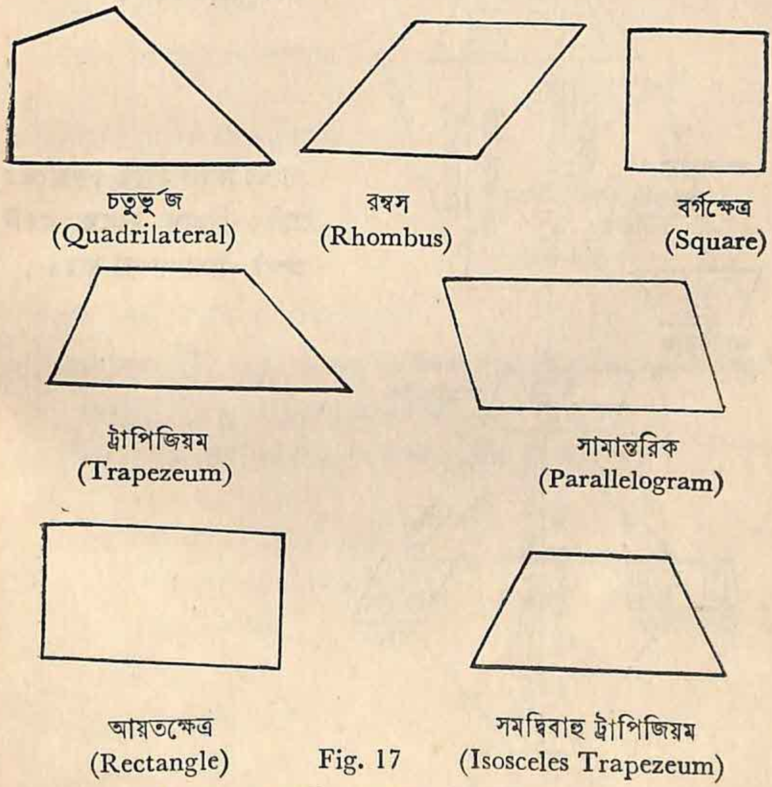
$\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$-এর মধ্যে $\angle ACB = \angle DFE =$ এক সমকোণ, অতিভুজ $AB \simeq$ অতিভুজ $DE$ এবং $BC \simeq EF$ হইলে, $\triangle ABC \simeq \triangle DEF$। সর্বসমতার এই সর্তকে 'সমকোণ-বাহু-অতিভুজ' (Rightangle-Side-Hypotenuse বা সংক্ষেপে RSH ) বলে।

# দ্বিতীয় অধ্যায়

## চতুর্ভুজের প্রকারভেদ ও সামান্তরিকের ধর্ম

### 1. চতুর্ভুজের প্রকারভেদ

চারিটি বাহুদ্বারা কোন সামতলিক ক্ষেত্র সীমাবদ্ধ হইলে চিত্রটিকে **চতুর্ভুজ** বলে। চতুর্ভুজ বিভিন্ন প্রকারের হইতে পারে। যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল তাহাকে **সামান্তরিক** বলে। আবার সামান্তরিকের সব বাহুগুলি সমান হইলে তাহাকে **রম্বস** বলে। রম্বসের কোন কোণই এক সমকোণের সমান হয় না।



চতুর্ভুজ (Quadrilateral) রম্বস (Rhombus) বর্গক্ষেত্র (Square)

ট্রাপিজিয়ম (Trapezeum) সামান্তরিক (Parallelogram)

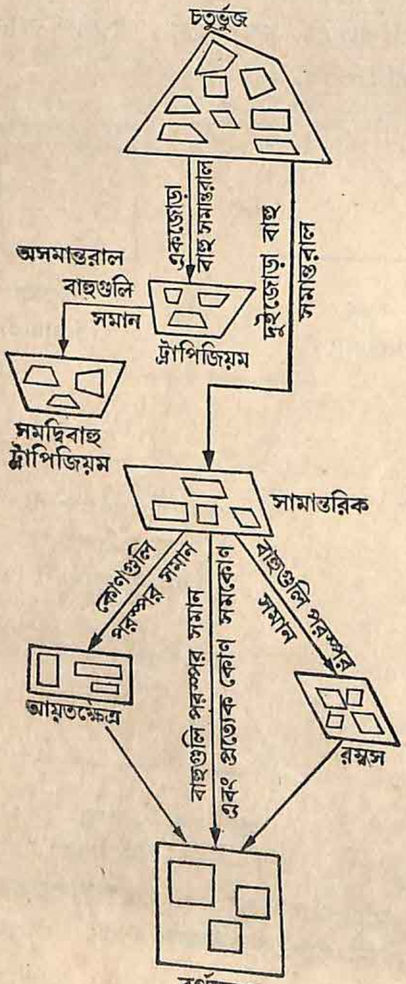
আয়তক্ষেত্র (Rectangle) সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম (Isosceles Trapezeum)

Fig. 17

যে সামান্তরিকের কোণগুলি প্রত্যেকে সমকোণ, তাহাকে **আয়তক্ষেত্র** বলে। যে আয়তক্ষেত্রের সকল বাহু সমান, তাহাকে **বর্গক্ষেত্র** বলে। আবার

যে চতুর্ভুজের কেবলমাত্র দুই বাহু সমান্তরাল, তাহাকে **ট্রাপিজিয়ম** বলে। ট্রাপিজিয়মের দুইটি অসমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্য সমান হইলে তাহাকে **সমবাহু ট্রাপিজিয়ম** বলে।

উপরোক্ত সব রকম চিত্রকেই চতুর্ভুজ বলা হয়। আবার বর্গক্ষেত্র, রম্বস ও আয়তক্ষেত্রকেও সামান্তরিক বলা চলে। বর্গক্ষেত্রকে একটি বিশেষ রকমের আয়তক্ষেত্র বলা চলে।




আবার ট্রাপিজিয়ম হইল একটি বিশেষ রকমের চতুর্ভুজ যাহা সামান্তরিক নয়।

পার্শ্বের চিত্রটি হইতে চতুর্ভুজের শ্রেণী বিভাগ সম্বন্ধে একটি সুস্পষ্ট ধারণা পাওয়া যায়।

Fig. 18

## সামান্তরিকের ধর্ম

### উপপাদ্য (i)

সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি ও কোণগুলি পরস্পর সর্বসম। প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে ও কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

মনে কর, ABCD একটি সামান্তরিক। উহার AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে,

(1) $AB \simeq CD$, $BC \simeq DA$;

(2) $\angle DAB \simeq \angle BCD$, $\angle ABC \simeq \angle CDA$,

(3) $\triangle ABC \simeq \triangle CDA$, $\triangle BCD \simeq \triangle DAB$ ও

(4) $AO \simeq OC$; $OB \simeq OD$।

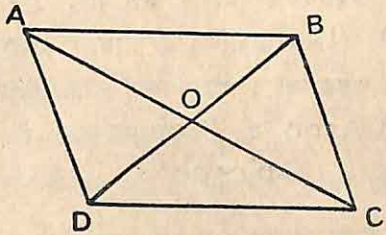


Fig. 19

**প্রমাণ ঃ** (1) AB ও DC সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়কে AC সরলরেখা ছেদ করিয়াছে। $\therefore$ $\angle CAB \simeq$ একান্তর $\angle ACD$।

অনুরূপভাবে, AD ও BC সমান্তরাল সরলরেখা দুইটিকে AC সরলরেখা ছেদ করিয়াছে।

$\therefore \angle CAD \simeq$ একান্তর $\angle ACB$

এখন $\triangle ABC$ ও $\triangle CDA$ দ্বয়ের মধ্যে

$\angle CAB \simeq \angle ACD$,

$\angle ACB \simeq \angle CAD$

এবং AC সাধারণ বাহু।

$\therefore \triangle ABC \simeq \triangle CDA$ (সর্বসমতার কোণ-কোণ-বাহু সর্তানুসারে)

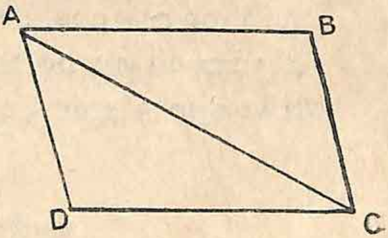


Fig. 20

$\therefore$ $AB \simeq DC$ এবং $BC \simeq DA$,

(2) **অঙ্কন ঃ** CB-কে E পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল ( Fig. 21 )।

**প্রমাণ ঃ** এখন BC ∥ AD এবং AB ইহাদের ছেদ করিয়াছে।

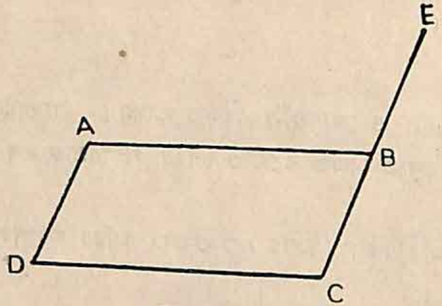



Fig. 21

∴ ∠EBA ≃ একান্তর ∠DAB······(i)

আবার AB ∥ CD এবং EC ইহাদের ছেদ করিয়াছে।

∴ ∠EBA ≃ অনুরূপ ∠BCD······(ii)

∴ (i) এবং (ii) হইতে পাই

∠DAB ≃ ∠BCD

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, ∠ABC ≃ ∠CDA

(3) (1)-এ প্রমাণিত হইয়াছে, △ABC ≃ △CDA.

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, △BCD ≃ △DAB

(4) △AOD ও △COB-এর মধ্যে

AD ≃ BC

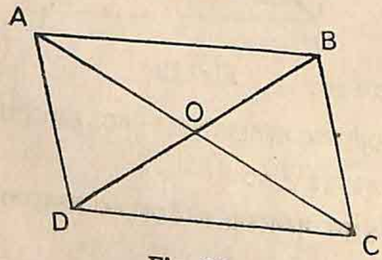



Fig. 22

∠OAD ≃ একান্তর ∠OCB (∵ AD ∥ BC এবং AC ইহাদের O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে) এবং ∠ODA ≃ একান্তর ∠OBC (∵ AD ∥ BC এবং DB ইহাদের ছেদ করিয়াছে)।

∴ △AOD ≃ △COB, (সর্বসমতার কোণ-কোণ-বাহু সর্তানুসারে)

∴ AO ≃ CO এবং DO ≃ BO

অর্থাৎ AC ও BD কর্ণ প্রত্যেকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

## অনুশীলনী

1. রম্বসের কর্ণগুলি পরস্পর সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

2. যদি সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হয় তাহা হইলে উহার অবশিষ্ট কোণগুলিও সমকোণ হইবে।

3. একই বাহুর উভয় দিকে অঙ্কিত দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করিবে।

4. রম্বসের কর্ণদ্বয় উহাকে চারিটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

5. দুইটি রেখাংশ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে উহাদের প্রান্তবিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু হইবে।

6. সমান দৈর্ঘ্যের দুইটি রেখাংশ পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে প্রমাণ কর, প্রান্তবিন্দু চারিটি একটি বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু।

**উপপাদ্য (ii)**

যদি একটি চতুর্ভুজের

(1) বিপরীত বাহুগুলি সর্বসম হয়,

অথবা (2) বিপরীত কোণগুলি সর্বসম হয়,

অথবা (3) দুইটি বিপরীত বাহু সর্বসম ও সমান্তরাল হয়,

অথবা (4) কর্ণগুলি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহা হইলে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে।

(1) ABCD একটি চতুর্ভুজ, ইহার $AB \simeq CD, BC \simeq DA$, প্রমাণ করিতে হইবে, ABCD একটি সামান্তরিক।

**অঙ্কন :** AC যোগ করা হইল।

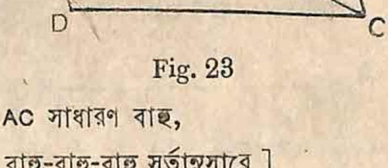



Fig. 23

**প্রমাণ :** $\triangle ABC$ ও $\triangle CDA$-এর মধ্যে $AB \simeq CD$, $BC \simeq DA$, AC সাধারণ বাহু,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম [ সর্বসমতার বাহু-বাহু-বাহু সর্তানুসারে ]

$\therefore \angle BAC \simeq \angle DCA$

কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ।

$\therefore AB \parallel CD$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, $AD \parallel BC$

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

(2) এখানে ABCD চতুর্ভুজের $\angle BAD \simeq \angle DCB$ এবং $\angle CDA \simeq \angle ABC$। প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

**প্রমাণ :** দেওয়া আছে, $\angle BAD \simeq \angle DCB \ldots (i)$

$\angle CDA \simeq \angle ABC \ldots (ii)$

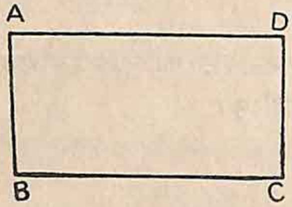


Fig. 24

(i) এবং (ii) যোগ করিলে $\angle BAD + \angle CDA = \angle DCB + \angle ABC$

যেহেতু ABCD একটি চতুর্ভুজ,

$\therefore \angle CDA + \angle DCB + \angle ABC + \angle BAD = 4$ সমকোণ।

$\therefore \angle BAD + \angle CDA = 4$ সমকোণের অর্ধেক, অর্থাৎ 2 সমকোণ।

AB ও CD সরলরেখাকে AD সরলরেখা ছেদ করার ফলে একই পার্শ্বে $\angle BAD$ ও $\angle CDA$ অন্তঃস্থ কোণ দুইটি উৎপন্ন হইয়াছে।

$\because \angle BAD + \angle CDA =$ দুই সমকোণ।

$\therefore AB \parallel CD$

অনুরূপভাবে, $AD \parallel BC$,

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

(3) ABCD চতুর্ভুজটির $AB \simeq CD$ ও $AB \parallel CD$,

প্রমাণ করিতে হইবে, ABCD একটি সামান্তরিক।

**অঙ্কন :** AC যুক্ত কর।

**প্রমাণ :** $AB \parallel DC$ ; AB ও CD সরলরেখাকে AC সরলরেখা ছেদ করিয়াছে।

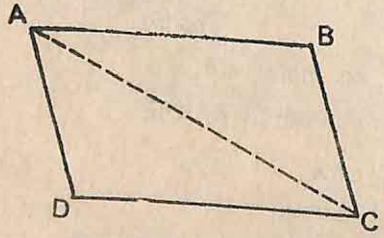


Fig. 25

$\therefore \angle BAC \simeq \angle DCA$, (যেহেতু ইহারা একান্তর কোণ)

এখন $\triangle ABC$ ও $\triangle CDA$-এর মধ্যে $AB \simeq CD$, $\angle BAC \simeq \angle DCA$ এবং AC উহাদের সাধারণ বাহু।

$\therefore \triangle ABC \simeq \triangle CDA$ [ সর্বসমতার বাহু-কোণ-বাহু সর্তানুসারে ]

$\therefore \angle CAD \simeq \angle ACB$, কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ।

∴ AD ∥ BC

এখন ABCD চতুর্ভুজের AB ∥ DC ও AD ∥ BC

∴ ABCD একটি সামান্তরিক।

(4) ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। দেওয়া আছে, AO ≃ CO এবং BO ≃ DO। প্রমাণ করিতে হইবে, ABCD একটি সামান্তরিক।

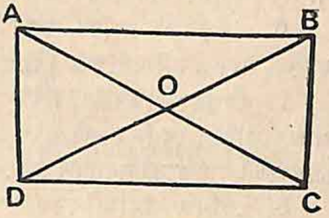



Fig. 26

**প্রমাণ :** Δ AOB ও Δ COD-এর মধ্যে AO ≃ CO, BO ≃ DO এবং ∠AOB ≃ ∠COD ( যেহেতু ইহারা বিপ্রতীপ কোণ )।

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম [ সর্বসমতার বাহু-কোণ-বাহু সর্তানুসারে ]

∴ AB ≃ CD

এবং ∠OBA ≃ ∠ODC

আবার ইহারা একান্তর কোণ

∴ AB ∥ CD

অর্থাৎ AB এবং CD সমান ও সমান্তরাল।

∴ ABCD একটি সামান্তরিক।

## অনুশীলনী

1. সামান্তরিকের যে কোন বাহুসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক সমকোণে মিলিত হয়।

2. রম্বসের কর্ণ যে দুইটি কোণের মধ্য দিয়া যায়, উহা ঐ কোণদুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

3. ABCD সামান্তরিকের AC কর্ণ যদি ∠Aকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে উহা ∠Cকেও সমদ্বিখণ্ডিত করিবে এবং সামান্তরিকটি একটি রম্বস হইবে।

4. কোন সামান্তরিকের একটি কর্ণের মধ্যবিন্দু দিয়া বিপরীত বাহুদ্বয় পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশ ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

5. ABC ও XYZ ত্রিভুজদ্বয়ের AB ও BC বাহুদ্বয় যথাক্রমে XY ও YZ বাহুদ্বয়ের সমান ও সমান্তরাল হইলে, AC ও XZ বাহুদ্বয়ও সমান্তরাল বা একই সরলরেখায় হইবে এবং সমান হইবে।

6. চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় সমান হইলে এবং পরস্পর সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হইলে, উহা একটি বর্গক্ষেত্র হইবে।

7. ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু দিয়া বিপরীত বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কিত করিলে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হয়, প্রদত্ত ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি ঐ উৎপন্ন ত্রিভুজটির বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু হইবে।

8. কোনও সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যে কোন সরলরেখা টানিলে উহা সামান্তরিককে সমান দুই অংশে বিভক্ত করে।

9. সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়মের ভূমিস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান।

10. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা ও উহাদের একটি ভেদকের অন্তর্ভুক্ত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন করে।

11. P,Q,R,S, যথাক্রমে ABCD আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, PQRS একটি রম্বস।

12. AB বাহুর উপর ABCD ও ABPQ দুইটি সামান্তরিক, কিন্তু C, D, P, Q সমরেখ নয়; প্রমাণ কর যে, CDQP একটি সামান্তরিক।

# তৃতীয় অধ্যায়

## 1. সমান্তরাল সরলরেখা সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

**উপপাদ্য (i)**

তিন বা ততোধিক সমান্তরাল সরলরেখা দ্বারা খণ্ডিত কোন ভেদকের খণ্ডিতাংশগুলি পরস্পর সর্বসম হইলে, উহাদের দ্বারা খণ্ডিত অন্য যে কোন ভেদকের খণ্ডিতাংশগুলিও পরস্পর সর্বসম হইবে।

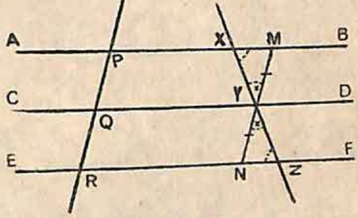



Fig. 27

AB, CD, EF, তিনটি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা দ্বারা PQR ভেদকটি যথাক্রমে P, Q, এবং R বিন্দুতে খণ্ডিত হইয়াছে এবং খণ্ডিতাংশ PQ $\simeq$ খণ্ডিতাংশ QR।

একই সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি দ্বারা অপর একটি ভেদক XYZ যথাক্রমে X, Y এবং Z বিন্দুতে খণ্ডিত হইয়াছে এবং XY ও YZ ভেদকটির খণ্ডিতাংশদ্বয়। প্রমাণ করিতে হইবে যে, খণ্ডিতাংশ XY $\simeq$ খণ্ডিতাংশ YZ।

**অঙ্কন :** Y বিন্দু দিয়া MYN রেখাংশ PQR সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া টানা হইল ; ইহা ABতে M বিন্দুতে এবং EFতে N বিন্দুতে মিলিত হইল।

**প্রমাণ :** PQYM একটি সামান্তরিক, ( $\because$ বিপর বাহুগুলি সমান্তরাল )

$\therefore$ PQ $\simeq$ MY

QRNY একটি সামান্তরিক, ( $\because$ বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল )

$\therefore$ QR $\simeq$ YN

কিন্তু PQ $\simeq$ QR ( প্রদত্ত )

$\therefore$ MY $\simeq$ YN

$\Delta MXY$ এবং $\Delta NZY$ ত্রিভুজদ্বয়ে

$\angle MXY \simeq$ একান্তর $\angle NZY$

$\angle XYM \simeq$ বিপ্রতীপ $\angle ZYN$

ও $MY \simeq YN$

$\therefore \Delta MXY \simeq \Delta NYZ$ ( সর্বসমতার কোণ-কোণ-বাহু সর্তানুসারে )

$\therefore$ খণ্ডিতাংশ $XY \simeq$ খণ্ডিতাংশ $YZ$।

**উপপাদ্য (ii)**

কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া অপর একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে উহা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং মধ্যবিন্দুদ্বয়-সংযোজক রেখাংশ দ্বিতীয় বাহুর অর্ধেক হইবে।

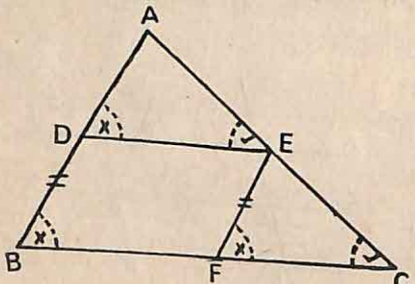



Fig. 28

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং D বিন্দু AB-এর মধ্যবিন্দু। D বিন্দু দিয়া BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা ACকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, E বিন্দু AC-এর মধ্যবিন্দু এবং $DE = \frac{1}{2} BC$।

**অঙ্কন :** E বিন্দু দিয়া BA-এর সমান্তরাল করিয়া EF টানা হইল ; উহা BCকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

**প্রমাণ :** যেহেতু $DE \parallel BC$, AB ও AC উহাদের ভেদক,

$\therefore \angle ADE \simeq \angle DBF$ এবং $\angle AED \simeq \angle ECF$

আবার যেহেতু $EF \parallel AB$ এবং BC উহাদের ভেদক ;

$\therefore \angle DBF \simeq \angle EFC$

পুনরায় $DE \parallel BF$ ও $DB \parallel EF$

$\because$ BDEF একটি সামান্তরিক,

$\therefore DB \simeq EF$

এখন $\triangle ADE$ ও $\triangle EFC$-এর মধ্যে

$AD \simeq EF$ ( $\because AD \simeq DB$ )

$\angle ADE \simeq \angle EFC$

$\angle AED \simeq \angle ECF$

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ( ত্রিভুজের কোণ-কোণ-বাহু সর্তানুসারে )

∴ AE ≃ EC অর্থাৎ E বিন্দু AC-এর মধ্যবিন্দু।

আবার △ADE ও △EFC সর্বসম বলিয়া DE ≃ FC

এবং BDEF সামান্তরিক বলিয়া DE ≃ BF,

∴ 2 DE ≃ BF + FC = BC

∴ DE ≃ $\frac{1}{2}$ BC

∴ দৈর্ঘ্য DE = $\frac{1}{2}$ দৈর্ঘ্য BC

বিপরীতক্রমে, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দু-সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক হইবে।

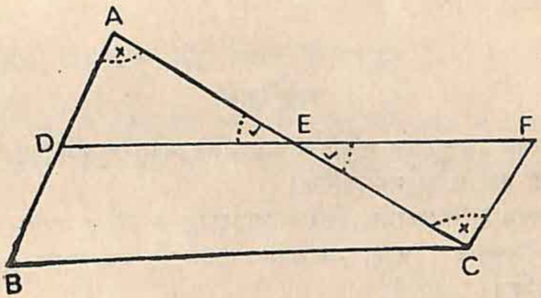



Fig. 29

মনে কর, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।

DE যোগ করা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, DE, BC-এর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

**অঙ্কন :** DEকে বর্ধিত করিয়া উহা হইতে DE-এর সমান করিয়া EF কাটা হইল, FC যোগ কর।

**প্রমাণ :** এখন △ADE ও △EFC-এর মধ্যে

AE ≃ EC (স্বীকার),

DE ≃ EF (অঙ্কন),

এবং ∠AED ≃ ∠FEC ( বিপ্রতীপ );

অতএব ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম;

∴ AD ≃ CF এবং ∠EAD ≃ ∠ECF, ইহারা একান্তর কোণ,

∴ AD ∥ CF অর্থাৎ AB ∥ CF

আবার AD ≃ DB,

∴ BDFC চতুর্ভুজের BD ≃ FC, আবার BD ∥ CF,

অতএব BDFC একটি সামান্তরিক

∴ DF ≃ BC এবং DF ∥ BC, অতএব DE ∥ BC,

কিন্তু DE ≃ EF

∴ 2DE = BC

এবং $DE = \frac{1}{2}BC$

∴ DE ∥ BC ও $DE = \frac{1}{2}BC$

∴ দৈর্ঘ্য DE = দৈর্ঘ্য $\frac{1}{2}BC$।

## অনুশীলনী

1. কোন চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি যুক্ত করিলে যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হয়, তাহা সামান্তরিক।

2. কোন ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যোগ করিলে যে সরলরেখা উৎপন্ন হয়, তাহা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাহাদের সমষ্টির অর্ধেক।

3. ত্রিভুজের তিন বাহুর মধ্যবিন্দু যোগ করিলে চারিটি সর্বসম ক্ষুদ্রতর ত্রিভুজ ও তিনটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

4. ABCD একটি সামান্তরিক ; X ও Y যথাক্রমে AD ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু হইলে BX ও DY, AC কর্ণকে সমান তিন ভাগে ভাগ করে।

5. সামান্তরিকের কৌণিক বিন্দুগুলি হইতে বহিঃস্থ কোন সরলরেখার উপর চারিটি লম্ব টানা হইলে, দেখাও যে দুইটি বিপরীত কৌণিক বিন্দু হইতে লম্ব দৈর্ঘ্যের সমষ্টি অপর দুই বিন্দু হইতে লম্ব দৈর্ঘ্যের সমষ্টির সমান।

6. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপর যে কোন বিন্দু হইতে সমান দুই বাহুর উপর লম্ব টানিলে, তাহাদের সমষ্টি ভূমির যে কোন প্রান্তবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব দৈর্ঘ্যের সমান।

7. সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু ও অতিভুজের মধ্যবিন্দু যোগ করিলে যে সরলরেখা পাওয়া যায়, তাহা অতিভুজের অর্ধেক।

8. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত সরলরেখা অপর দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক-সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

9. চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যোগ করিলে যে দুইটি সরলরেখা পাওয়া যায়, তাহারা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

10. ত্রিভুজের কোন বাহুকে ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা দ্বারা যদি কয়টি সমান অংশে ভাগ করা হয় তাহা হইলে ঐ সরলরেখাগুলি অপর বাহুকে ঠিক সেই কয়টি সমান অংশে ভাগ করিবে।

11. ABC ত্রিভুজের BC ও CA-এর মধ্যবিন্দু D ও E-এর সংযোজক সরলরেখা A বিন্দু দিয়া BC-এর সমান্তরাল সরলরেখাকে F বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে, $\triangle ADF = \triangle BEC$।

12. $\triangle XYZ$-এর XY ও ZY-এর উপর R ও S বিন্দুদ্বয় এমন ভাবে অবস্থিত যেন $XR = \frac{1}{3}XY$ এবং $ZS = \frac{2}{3}ZY$।

দেখাও যে, $\triangle RSY = \frac{2}{3}\triangle XZR$।

13. P ও Q বিন্দুদ্বয় $\triangle ABC$-এর মধ্যে অবস্থিত। $\triangle ABP = \triangle ACQ$ এবং $\triangle ABQ = \triangle ACP$ হইলে; প্রমাণ কর যে, PQ ও BC সমান্তরাল।

## 2. সমবিন্দু সম্পর্কিত উপপাদ্য

তিন বা ততোধিক সরলরেখা একটি বিন্দুতে মিলিত হইলে রেখাগুলিকে **সমবিন্দু** (Concurrent) বলা হয়। নীচে সমবিন্দু সম্পর্কিত তিনটি উপপাদ্য দেওয়া হইল।

### উপপাদ্য (i)

যে কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।

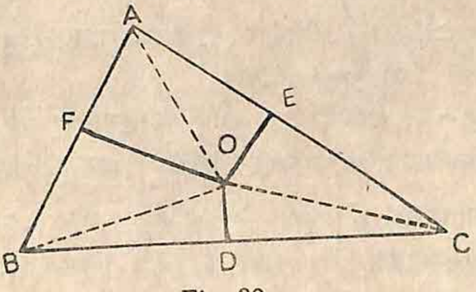



Fig. 30

ABC ত্রিভুজের BC, CA এবং AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দুত্রয় যথাক্রমে D, E এবং F। প্রমাণ করিতে হইবে, D, E এবং F বিন্দুতে বাহুগুলির উপরে অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।

পক্ষান্তরে বলা যাইতে পারে, BC ও AC-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে বাহু দুইটির উপরে লম্ব O বিন্দুতে ছেদ করিলে AB-এর মধ্যবিন্দু F

এবং O বিন্দুর সংযোজক FO রেখাংশ AB-এর উপরে লম্ব প্রমাণ করিতে হইবে।

**অঙ্কন :** BC এবং AC-এর মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের ছেদবিন্দু O ; OF, OA, OB এবং OC রেখাংশদ্বারা যুক্ত কর।

**প্রমাণ :** OBD এবং OCD ত্রিভুজদ্বয়ে

BD ≃ CD ( ∵ D, BC-এর মধ্যবিন্দু

∠BDO ≃ ∠CDO ( ∵ উভয়েই 1 সমকোণের সমান )

OD সাধারণ।

∴ ΔOBD ≃ ΔOCD [ সর্বসমতার বাহু-কোণ-বাহু সর্তানুসারে ]

∴ OB ≃ OC (i)

অনুরূপভাবে OAE এবং OCE ত্রিভুজদ্বয়ে

OA ≃ OC (ii)

(i) ও (ii) হইতে OB ≃ OA (iii)

এখন OAF এবং OFB ত্রিভুজদ্বয়ে

OA ≃ OB [ (iii) হইতে ) ]

AF ≃ BF ( ∵ F, AB-এর মধ্যবিন্দু )

এবং OF সাধারণ,

∴ ΔOAF ≃ ΔOBF [ সর্বসমতার বাহু-বাহু-বাহু সর্তানুসারে ]

∴ ∠OFA ≃ ∠OFB ( সর্বসম ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ কোণ বলিয়া )

কিন্তু ∠OFA + ∠OFB = 2 সমকোণ

∴ ∠OFA = 1 সমকোণ, ∵ OF, AB-এর উপর লম্ব।

অর্থাৎ ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।

**কোণসমদ্বিখণ্ডক** [ Angle bisector ]—কোন কোণের শীর্ষবিন্দু হইতে অঙ্কিত সরলরেখা যদি কোণটিকে দুইটি সর্বসম কোণে বিভক্ত করে তখন ঐ রেখাকে কোণসমদ্বিখণ্ডক বলা হয়।

∠ABC-এর শীর্ষবিন্দু হইতে অঙ্কিত সরলরেখা $BO_1$ ∠ABCকে দুইটি সর্বসম কোণ $\angle ABO_1$ এবং $\angle CBO_1$-এ বিভক্ত করিয়াছে ( Fig. 31 )। এক্ষেত্রে $BO_1$কে ∠ABC-এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক [Internal Bisector] বলা হয়। আবার লক্ষ্য কর, ∠ABC-এর বহিঃকোণ ∠ABD-কে অনুরূপভাবে $BO_2$ রেখা দুইটি সর্বসমকোণ $\angle ABO_2$ এবং $\angle DBO_2$-তে বিভক্ত করিয়াছে।

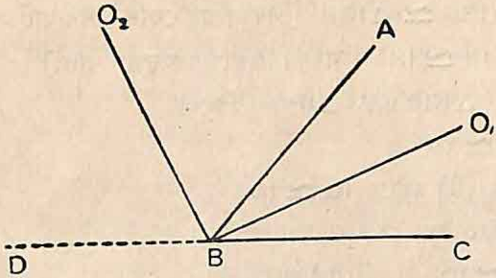


Fig. 31

এখানে $BO_2$কে ∠ABD-এর সমদ্বিখণ্ডক, অর্থাৎ ∠ABC-এর বহিঃসমদ্বিখণ্ডক [External Bisector] বলা হয়।

**উপপাদ্য (ii)**

যে কোন ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

[The internal bisectors of the angles of a triangle are concurrent.]

প্রমাণ করিতে হইবে, ABC ত্রিভুজের ∠ABC, ∠BCA এবং ∠CAB কোণগুলির অন্তঃসমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

পক্ষান্তরে বলা যাইতে পারে, ∠ABC এবং ∠ACB-এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক দুইটি I বিন্দুতে ছেদ করিলে AI সংযোজক রেখা ∠CAB-এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক হইবে।

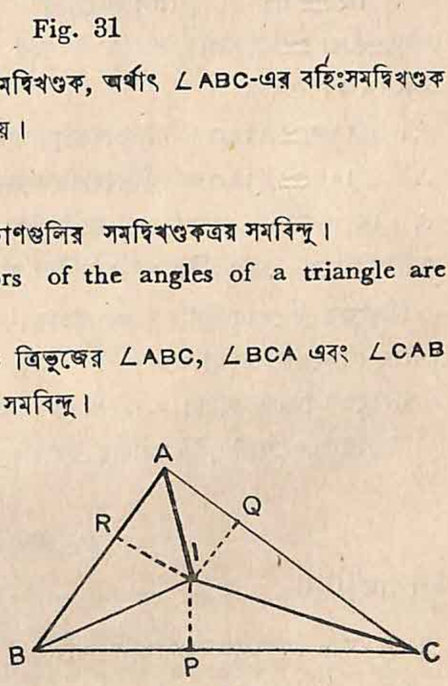


Fig. 32

**অঙ্কন ঃ** ∠ABC এবং ∠ACB-এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু I হইতে AB, BC এবং CA-এর উপর যথাক্রমে IR, IP এবং IQ লম্ব অঙ্কিত কর, এবং AI রেখাংশদ্বারা যুক্ত কর।

**প্রমাণ ঃ** △IRB এবং △IBP-এর মধ্যে

∠IBR ≃ ∠IBP [ ∵ BI, ∠ABC-এর সমদ্বিখণ্ডক ]

∠IRB ≃ ∠IPB ( অঙ্কনানুসারে )

এবং IB সাধারণ,

∴ △IRB ≃ △IBP [ সর্বসমতার কোণ-কোণ-বাহু সর্তানুসারে ]

∴ IP ≃ IR [ সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু ] (i)

অনুরূপভাবে △IQC এবং △IPC-এর মধ্যে

IQ ≃ QP (ii)

(i) এবং (ii) হইতে IQ ≃ IR (iii)

এখন △IAR এবং △AIQ ত্রিভুজদ্বয়ে

IR ≃ IQ [ (iii) হইতে ]

∠ARI ≃ ∠AQI ( ∵ উভয়েই সমকোণ )

এবং IA সাধারণ

∴ △IAR ≃ △IAQ [ সর্বসমতার বাহু-কোণ-বাহু সর্তানুসারে ]

∴ ∠IAR ≃ ∠IAQ [ সর্বসমত্রিভুজের অনুরূপ কোণ বলিয়া ]

∴ IA, ∠BAC কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক।

অর্থাৎ ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তঃসমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

ত্রিভুজের যে কোন শীর্ষবিন্দু এবং উহার বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু-সংযোজক রেখাকে ত্রিভুজের **মধ্যমা** বলে।

ত্রিভুজের তিনটি করিয়া মধ্যমা আছে।

ত্রিভুজের যে কোন দুইটি মধ্যমার ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের **ভরকেন্দ্র** বলে।

**উপপাদ্য (iii)**

যে কোন ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি সমবিন্দু।

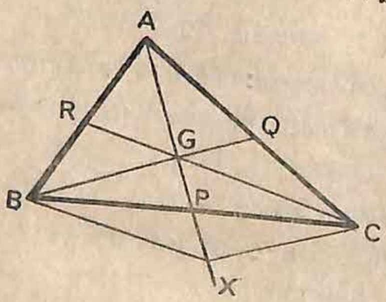



Fig. 33

মনে কর, ABC ত্রিভুজের BQ এবং CR মধ্যমা G বিন্দুতে ছেদ করে এবং AG সংযোজক রেখা BC-কে P বিন্দুতে ছেদ করে। এখন AP, △ABC-এর তৃতীয় মধ্যমা প্রমাণ করিলেই উপপাদ্যটি সিদ্ধ হইবে।

**অঙ্কন :** B বিন্দু হইতে RC মধ্যমার সমান্তরাল রেখা অঙ্কিত কর। ইহাকে AP-এর বর্ধিতাংশ X বিন্দুতে ছেদ করে। XC যুক্ত কর।

**প্রমাণ :** ABX ত্রিভুজের RG ∥ BX (অঙ্কনানুসারে)

AB-এর মধ্যবিন্দু R,

∴ AX-এর মধ্যবিন্দু G,

আবার AC-এর মধ্যবিন্দু Q,

এবং AX-এর মধ্যবিন্দু G [ প্রমাণিত ]

∴ AXC ত্রিভুজের AX ও AC-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে G ও Q সংযোজক রেখা XC-এর সমান্তরাল।

∴ BXCG চতুর্ভুজের BG ∥ XC

এবং GC ∥ BX

∴ BXCG সামান্তরিক।

সুতরাং BC-এর মধ্যবিন্দু P [ ∵ সামান্তরিকের কর্ণ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে ]

∴ AG রেখা BCকে P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে,

অর্থাৎ AP মধ্যমা।

সুতরাং ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

## অনুশীলনী

1. প্রমাণ কর, যে কোন রম্বসের সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের লম্বসমদ্বিখণ্ডকদ্বয় সেই বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কর্ণের সহিত সমবিন্দু।

2. ABCD একটি সামান্তরিক। AB এবং BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে ছেদ করে। আবার CD ও AD-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর, PQ রেখা AC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

3. ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু O ; AO রেখা BC-এর D বিন্দুতে লম্ব। প্রমাণ কর, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

4. ABC ত্রিভুজের BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক এবং ∠B-এর অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে ছেদ করে। যদি OA, ∠A-এর সমদ্বিখণ্ডক হয়, প্রমাণ কর, AB = AC।

5. ABC ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর, AD মধ্যমার AG = 2GD।

6. ABC ত্রিভুজের A বিন্দু হইতে অঙ্কিত BC-এর সমান্তরাল QR, B বিন্দু হইতে অঙ্কিত AC-এর সমান্তরাল PR এবং C বিন্দু হইতে অঙ্কিত AB-এর সমান্তরাল PQ। প্রমাণ কর, PA, BQ এবং RC সমবিন্দু।

7. ABC ত্রিভুজের BE এবং CF মধ্যমাদ্বয়। A বিন্দু হইতে অঙ্কিত CF-এর সমান্তরাল BEকে X বিন্দুতে এবং BE-এর সমান্তরাল CFকে Y বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর, YBCX সামান্তরিক।

8. ABC একটি ত্রিভুজের AC ও BC-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D এবং E। BP রেখা AC-এর সমান্তরাল। উহা DE রেখার বর্ধিতাংশকে P বিন্দুতে ছেদ করে। AP এবং BD, O বিন্দুতে ছেদ করে। OE রেখা ABকে R বিন্দুতে ছেদ করে। RC রেখা BDকে S বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর, A, S এবং E একই সরলরেখায় অবস্থিত।

9. ABCD সামান্তরিকের CD-এর মধ্যবিন্দু P, AP সংযোজক রেখা বর্ধিত করায় BCকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। AC এবং BP, G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর, QG রেখা ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

# চতুর্থ অধ্যায়

## 1. ক্ষেত্রফল সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

**পুনরালোচনা :**—কতকগুলি সরলরেখা অথবা একটি বক্ররেখা অথবা একটি সরলরেখা ও একটি বক্ররেখা যে পরিমাণ সামতলিক ক্ষেত্রকে পরিবেষ্টন করিয়া থাকে তাহাকে ঐ ক্ষেত্রের **ক্ষেত্রফল** বলি।

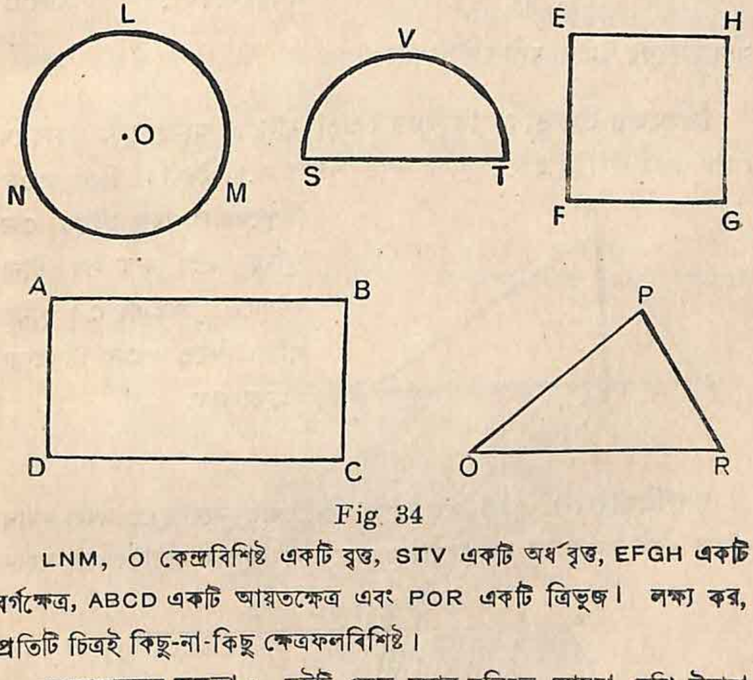



Fig 34

LNM, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত, STV একটি অর্ধবৃত্ত, EFGH একটি বর্গক্ষেত্র, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র এবং PQR একটি ত্রিভুজ। লক্ষ্য কর, প্রতিটি চিত্রই কিছু-না-কিছু ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট।

**ক্ষেত্রফলের সমতা :** দুইটি ক্ষেত্র সমান বলিতে আমরা বুঝি উহারা একই ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট। অর্থাৎ ক্ষেত্র দুইটি সম আকৃতির নাও হইতে পারে কিন্তু সমপরিমাণ সামতলিক ক্ষেত্রকে পরিবেষ্টন করিয়া থাকে।

**সামান্তরিক ও ত্রিভুজের উচ্চতা :** সামান্তরিকের উচ্চতা বলিতে আমরা বুঝি উহার যে কোন দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে দূরত্ব। চিত্রে (Fig.35) ABCD সামান্তরিকের AD বাহুর উপর একটি বিন্দু E লওয়া হইল। E হইতে BC বাহুর উপর EF লম্ব টানা হইল। তাহা হইলে EF হইল BC

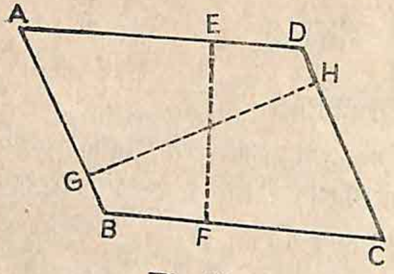



Fig. 35

ভূমির পরিপ্রেক্ষিতে ABCD সামান্তরিকের উচ্চতা। অনুরূপভাবে AB বাহুর উপর G একটি বিন্দু লইয়া যদি CD বাহুর উপর GH লম্ব টানা হয় তাহা হইলেও GHকে AB ভূমির পরিপ্রেক্ষিতে ABCD সামান্তরিকের উচ্চতা বলা যাইতে পারে।

**ত্রিভুজের উচ্চতা ঃ** ত্রিভুজের উচ্চতা বলিতে আমরা বুঝি উহার যে কোন একটি শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য। চিত্রে PQR ত্রিভুজের P বিন্দু হইতে QR ভূমির উপর PT লম্ব টানা হইয়াছে। অতএব QR ভূমির পরিপ্রেক্ষিতে PQR ত্রিভুজের উচ্চতা PT.

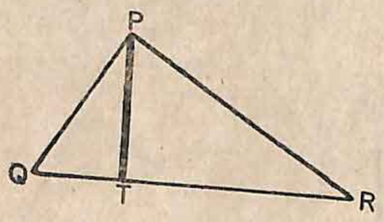



Fig. 36

**অনুসিদ্ধান্ত** (i) দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে দূরত্ব সর্বদা সমান বলিয়া একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকগুলি সমান

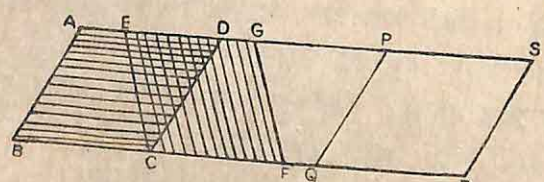



Fig. 37

উচ্চতাবিশিষ্ট হয়। চিত্রে (Fig. 37) সামান্তরিক ABCD, সামান্তরিক ECFG, সামান্তরিক PQRS, একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AS এবং BR-এর মধ্যে অবস্থিত বলিয়া অনুভূমিক বাহুগুলির পরিপ্রেক্ষিতে ইহাদের উচ্চতা সর্বদা সমান।

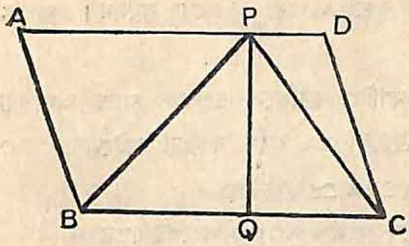



Fig. 38

**অনুসিদ্ধান্ত** (ii) অনুরূপভাবে বলা যায়, একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক যদি একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হয় তাহা হইলে উহাদের উচ্চতা সর্বদা সমান হইবে। চিত্রে (Fig. 38) ABCD সামান্তরিক এবং PBC ত্রিভুজ একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AD এবং BC-এর মধ্যে অবস্থিত বলিয়া BC-ভূমির পরিপ্রেক্ষিতে ইহাদের উচ্চতা PQ-এর সমান।

এখন আমরা ত্রিভুজ ও সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সম্বন্ধীয় কতগুলি উপপাদ্যের আলোচনা করিব।

**উপপাদ্য (i)**

একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

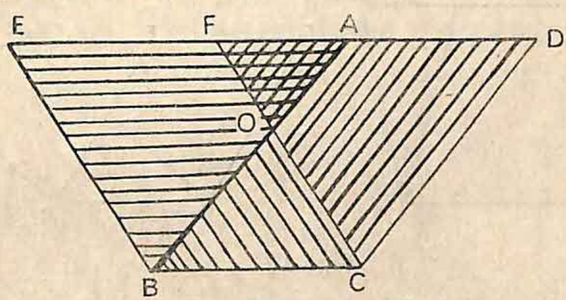



Fig. 39

সামান্তরিক ABCD ও সামান্তরিক EBCF একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় ED এবং BC-এর মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ করিতে হইবে, ইহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

মনে কর, AB এবং CF পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

**ব্যবহারিক প্রস্তাবনা ঃ** প্রথমে এক টুকরা কাগজ লইয়া △EBA-এর সমান একটি ত্রিভুজ কাটিয়া লওয়া হইল। আবার △FCD-এর সমান আর একটি ত্রিভুজ কাটিয়া লওয়া হইল। এখন △EBA ও △FCD

সম্পূর্ণভাবে মিলিয়া যায়। সুতরাং △EBA এবং △FCD সর্বসম। অর্থাৎ △EBA ≅ △FCD।

এখন △EBA হইতে △FOA কাটিয়া রাখিলে EBOF অংশ অবশিষ্ট থাকিবে। এবং △FCD হইতে ঐ △FOA অংশ কাটিয়া লইলে AOCD অংশ অবশিষ্ট থাকিবে। যেহেতু △EBA ≅ △FCD

∴ EBOF অংশের ক্ষেত্রফল = AOCD অংশের ক্ষেত্রফল

এখন এই দুই অংশের সহিত △OBC যুক্ত করিয়া একবার EBCF সামান্তরিক পাওয়া যায়; আর একবার এই একই অংশ অর্থাৎ △OBC, AOCD অংশের সহিত যুক্ত করিয়া ABCD সামান্তরিক পাওয়া যায়।

∴ ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = EBCF সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।

**যুক্তিমূলক প্রমাণ ঃ**

সামান্তরিক ABCD এবং সামান্তরিক EBCF একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AF এবং BC-এর মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ করিতে হইবে, ইহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

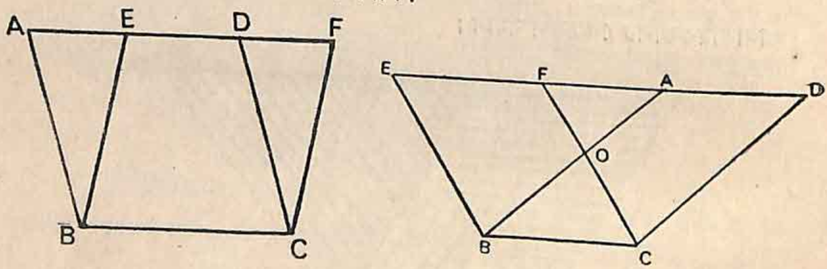



Fig. 40

**প্রমাণ :** △EBA এবং △FCD-এর মধ্যে

∠EAB ≅ ∠FDC } ∵ AB ∥ CD, EB ∥ FC
∠AEB ≅ ∠DFC } এবং ইহারা অনুরূপ কোণ

AB ≅ CD (ইহারা সামান্তরিকের বিপরীত বাহু)

∴ △EBA ≅ △FCD (ত্রিভুজের সর্বসমতার কোণ-বাহু-কোণ অনুসারে)

এখন, চতুর্ভুজ EBCD + △FCD = চতুর্ভুজ EBCD + △EBA

বা, চতুর্ভুজ EBCD − △FCD = চতুর্ভুজ EBCD − △EBA

অর্থাৎ উভয় চিত্র হইতে পাই

সামান্তরিক EBCF = সামান্তরিক ABCD।

**অনুসিদ্ধান্ত** (i) উপরের উপপাদ্য হইতে আমরা খুব সহজেই প্রমাণ করিতে পারি যে সমান সমান ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখা-যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকসমূহের ক্ষেত্রফল সর্বদা সমান হইবে।

**অনুসিদ্ধান্ত** (ii) একটি সামান্তরিক ও একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখা দুইটির মধ্যে অবস্থিত হইলে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হইবে।

চিত্রে ABCD আয়তক্ষেত্র এবং EBCF সামান্তরিক একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AF এবং BC-এর মধ্যে অবস্থিত। ইহাদের ক্ষেত্র-ফল সমান দেখাইতে হইবে।

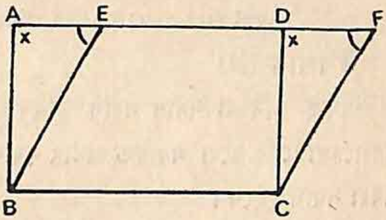



Fig. 41

যেহেতু আয়তক্ষেত্র একটি সামান্তরিক।

∴ উপরের উপপাদ্য অনুসারে আয়তক্ষেত্র ABCD = সামান্তরিক EBCF

**অনুসিদ্ধান্ত** (iii) সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা।

পূর্ববর্তী অনুসিদ্ধান্ত হইতে আমরা বলিতে পারি, ABCD আয়তক্ষেত্র এবং EBCF সামান্তরিক একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AF এবং BC-এর মধ্যে অবস্থিত বলিয়া ইহাদের ক্ষেত্রফল সমান। কিন্তু আমরা জানি, ▭ABCD = BC × AB = ভূমি × উচ্চতা ; সামান্তরিক

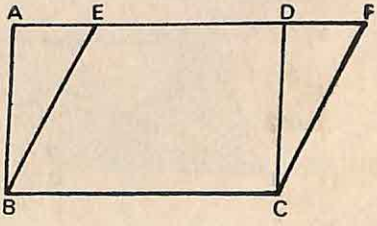



Fig. 42

EBCF এবং ABCD আয়তক্ষেত্র একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া ইহাদের উচ্চতা সমান।

∴ সামান্তরিক EBCF = BC × AB = ভূমি × উচ্চতা।

## অনুশীলনী

1. PQRS একটি সামান্তরিক। PQ-এর মধ্যবিন্দু X, PQ-কে Y পর্যন্ত

এইরূপভাবে বর্ধিত করা হইল যাহাতে XYRS একটি সামান্তরিক হয়। দেখাও, ▱PQRS = ▱XYRS।

2. একটি রম্বসের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 5·1 সে.মি. এবং ইহার ক্ষেত্রফল 25 বর্গ সে.মি.। ইহার উচ্চতা কত? রম্বসটি অঙ্কন করিয়া ইহার উচ্চতা মাপিয়া দেখ।

3. ABCD একটি আয়তক্ষেত্র। AB, BC, CD, DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R, S। প্রমাণ কর:

(i) PQRS একটি রম্বস

এবং (ii) PQRS-এর ক্ষেত্রফল ABCD আয়তক্ষেত্রের অর্ধেক।

**উপপাদ্য (ii)**

একই ভূমি বা সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত অর্থাৎ সমান উচ্চতাবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সর্বদা সমান হইবে।

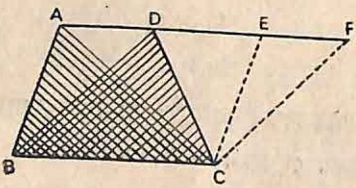



Fig. 43 (*a*)

△ABC এবং △DBC একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় BC এবং AD-এর মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ করিতে হইবে, ইহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

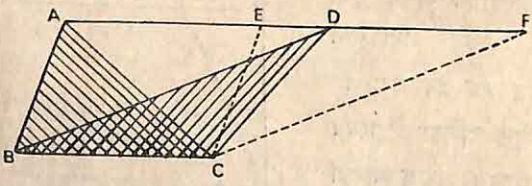



Fig. 43 (*b*)

**অঙ্কন:** ACকে কর্ণ করিয়া ABCE একটি সামান্তরিক এবং CDকে কর্ণ করিয়া DBCF সামান্তরিক অঙ্কন করা হইল।

**ব্যবহারিক প্রস্তাবনা:** △ABCকে কাটিয়া লইয়া যদি △ACF-এর সহিত একই সমতলে এমনভাবে রাখ যাহাতে A ও C বিন্দু এবং B ও E বিন্দু মিলিয়া যায়। তাহা হইলে প্রত্যক্ষ অভিজ্ঞতা হইতে দেখা যাইবে, △ABC এবং △ACE সবদিক দিয়া মিলিয়া যাইতেছে। অর্থাৎ ইহারা সর্বসম।

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AEC$

∴ $\Delta$ABC, ABCE সামান্তরিকের অর্ধেক।

অনুরূপভাবে কাগজ কাটিয়া দেখানো যায়, $\triangle DBC \cong \triangle DCF$। কিন্তু পূর্বেই কাগজ কাটিয়া দেখানো হইয়াছে ▱ ABCE এবং ▱ DBCF একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় BC এবং AF-এর মধ্যে অবস্থিত বলিয়া ইহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

∴ $\triangle ABC = \Delta DBC$ (∵ উভয়েই সমান সমান সামান্তরিকের অর্ধেক।)

**যুক্তিমূলক প্রমাণ :**

$\triangle ABC$ এবং $\Delta DBC$ একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় BC এবং AD-এর মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ করিতে হইবে, ইহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

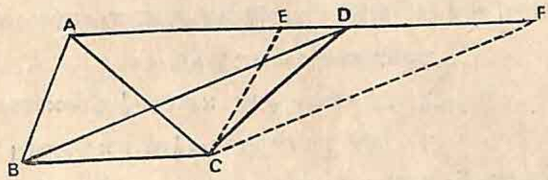



Fig. 44 (i)

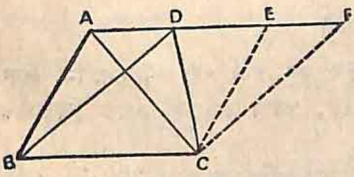



Fig. 44 (ii)

**অঙ্কন :** ACকে কর্ণ করিয়া ABCE একটি সামান্তরিক এবং CDকে কর্ণ করিয়া DBCF সামান্তরিক অঙ্কন করা হইল।

**প্রমাণ :** ABCE একটি সামান্তরিক ও AC ইহার কর্ণ

∴ $\Delta ABC \cong \triangle ACE$

∴ $\Delta ABC = \frac{1}{2}$▱ABCE

অনুরূপভাবে, $\Delta DBC = \frac{1}{2}$▱DBCF

কিন্তু ABCE সামান্তরিক এবং DBCF সামান্তরিক একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় BC এবং AF-এর মধ্যে অবস্থিত বলিয়া ইহাদের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

∴ $\triangle ABC = \triangle DBC$ (∵ ইহারা সমান সমান সামান্তরিকের অর্ধেক)

**অনুসিদ্ধান্ত** (i) ABC ত্রিভুজের BC ভূমি এবং AE উহার উচ্চতা। এখন ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে (Fig. 45)।

ACকে কর্ণ করিয়া ABCD একটি সামান্তরিক অঙ্কন করা হইল।

উপরের উপপাদ্য অনুসারে

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} \square ABCD$$

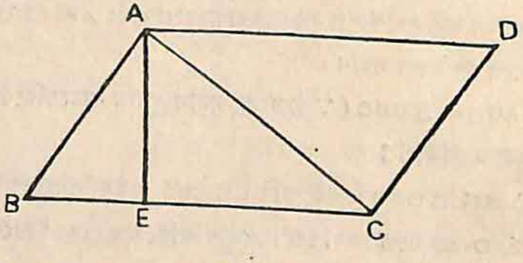


Fig. 45

কিন্তু আমরা পূর্বে দেখিয়াছি, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা।

$\therefore$ $\square ABCD = BC \times AE$

$\therefore$ $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \times AE = \frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা।

**অনুসিদ্ধান্ত** (ii) সমান সমান ভূমি ও সমান সমান উচ্চতাবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সর্বদা সমান হইবে।

## অনুশীলনী

1. যদি ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ হয় এবং AB = 7 সে. মি. এবং BC = 3 সে মি. এবং $\angle ABC = 90°$ হয়, তাহা হইলে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

2. একটি ত্রিভুজাকৃতি সমতল ভূমির বাহুগুলি যথাক্রমে 370 মি., 200 মি. এবং 100 মি.। 50 মিটারকে 1 সে.মি. ধরিয়া ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। উহার উচ্চতা নির্ণয় কর। বর্গমিটারে ইহার ক্ষেত্রফল কত?

3. প্রমাণ কর, ত্রিভুজের মধ্যমা উহাকে দুইটি সমান ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

4. প্রমাণ কর, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিকটিকে সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট চারিটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

5. প্রমাণ কর, ত্রিভুজের ভূমিকে সমত্রিখণ্ডিত করিয়া ছেদবিন্দুত্রয়ের সহিত শীর্ষবিন্দু যুক্ত করিলে তিনটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে।

6. ABCD একটি সামান্তরিক। DC এবং AD বাহুর উপর যথাক্রমে X ও Y দুইটি বিন্দু লওয়া হইল। প্রমাণ কর,

$$\triangle ABX = \triangle BYC\text{।}$$

**উপপাদ্য (iii)** সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এবং একই ভূমির একইদিকে অবস্থিত ত্রিভুজগুলি একই সমান্তরাল সরলরেখা-দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে।

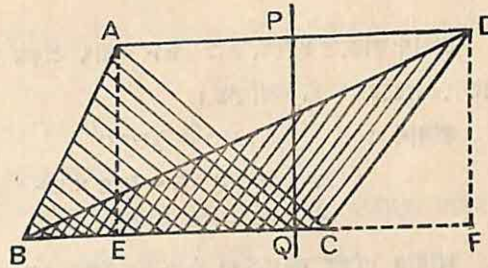


Fig. 46

$\triangle$ABC এবং $\triangle$DBC একই ভূমি BC-এর উপর BC বাহুর একই দিকে অবস্থিত এবং ইহাদের ক্ষেত্রফল সমান। প্রমাণ করিতে হইবে, ইহারা একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

**অঙ্কন :** AD যুক্ত করা হইল। A এবং D বিন্দু হইতে BC-এর উপর AE এবং DF লম্ব টানা হইল। ইহারা BC এবং বর্ধিত BCকে যথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে ছেদ করিল।

**ব্যবহারিক প্রস্তাবনা :** AD-এর মধ্যবিন্দু P এবং EF-এর মধ্যবিন্দু Q লওয়া হইল। PQ যুক্ত করিয়া, এই PQ সরলরেখা বরাবর সমগ্র চিত্রটি ভাঁজ করিলে দেখা যাইবে, A বিন্দুর উপর D এবং E বিন্দুর উপর F বিন্দু পড়িয়াছে।

অর্থাৎ AE = DF $\therefore$ AD $\parallel$ EF

অর্থাৎ AD এবং BF সমান্তরাল।

অর্থাৎ $\triangle$ABC এবং $\triangle$DBC একই সমান্তরাল সরলরেখা-দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

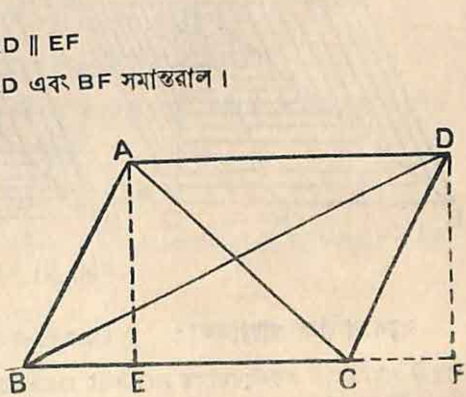


Fig. 47

**যুক্তিমূলক প্রমাণ :**

$\triangle$ABC এবং $\triangle$DBC একই ভূমি BC-এর একইদিকে অবস্থিত এবং ইহাদের ক্ষেত্রফল সমান। AD যুক্ত করা হইল। A এবং D বিন্দু হইতে BC এবং বর্ধিত BCF-এর উপর যথাক্রমে AE এবং DF লম্ব টানা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে, AD ∥ BF অর্থাৎ প্রদত্ত ত্রিভুজদ্বয় একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

**প্রমাণ :** $\because \triangle ABC = \triangle BCD$

$\therefore \frac{1}{2}BC \times AE = \frac{1}{2}BC \times DF$

$\therefore AE = DF$

আবার একই সরলরেখা BC-এর উপর AE এবং DF লম্ব বলিয়া ইহারা সমান্তরাল। অর্থাৎ AEFD চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু AE এবং DF সমান ও সমান্তরাল বলিয়া AEFD একটি সামান্তারক।

∴ ইহার অপর দুই বাহু EF এবং AD পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

∴ △ABC এবং △DBC একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AD এবং BF-এর মধ্যে অবস্থিত।

**উপপাদ্য (iv)**

যদি একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

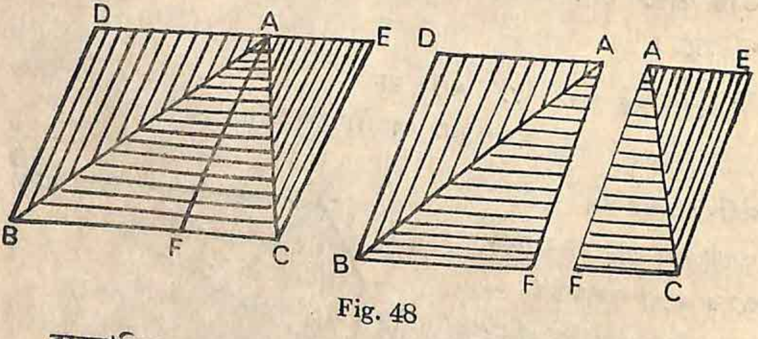



Fig. 48

**ব্যবহারিক প্রস্তাবনা :** △ABC এবং ▱DBCE একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় BC এবং DE-এর মধ্যে অবস্থিত। দেখাইতে হইবে, △ABC=½▱DBCE। BD-এর সমান্তরাল করিয়া AF টানা হইল। ইহা BCকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। ▱DBCE, ▱DBFA এবং ▱AFCEতে বিভক্ত হইল। ▱DBFA এবং ▱AFCE কাটিয়া লওয়া হইল।

আবার $\Delta$ ABF-এর সমান কাগজ কাটিয়া দেখানো যায়, $\Delta$ ABF ও $\Delta$ BAD সর্বসম।

$\therefore \quad \Delta ABF = \frac{1}{2} \square DBFA \quad \cdots \quad (i)$

অনুরূপভাবে $\Delta AFC = \frac{1}{2} \square AFCE \quad \cdots \quad (ii)$

এখন $\Delta$ ABF এবং $\Delta$ AFC এইরূপভাবে যুক্ত করা হইল যাহাতে প্রথম ত্রিভুজের AF বাহু দ্বিতীয় ত্রিভুজের AF বাহুর সহিত মিলিত হয়।

$\therefore$ আমরা $\Delta$ ABF এবং $\triangle$ AFC যুক্ত করিয়া $\triangle$ ABC পাই।

আবার অনুরূপভাবে ( $\square$DBFA এবং $\square$AFCE যুক্ত করিয়া ) $\square$DBCE পাই।

$\therefore$ (i) এবং (ii) হইতে বলা যায়,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \square DBCE$$

**যুক্তিমূলক প্রমাণ**

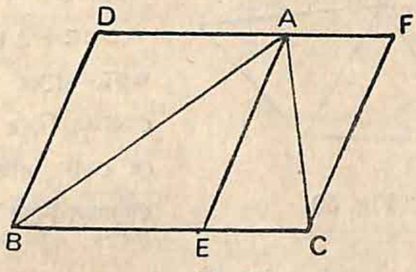



Fig. 49

$\triangle$ABC এবং $\square$DBCF একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরল-রেখাদ্বয় DF এবং BC-এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে, $\triangle ABC = \frac{1}{2} \square DBCF$

**অঙ্কন :** AE $\parallel$ CF টানা হইল। ইহা BC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। $\therefore$ AE $\parallel$ DB

**প্রমাণ :** $\square$DBEA-এর কর্ণ AB

$\therefore \quad \Delta ADB \simeq \Delta ABE$

অনুরূপভাবে $\square$ AECF-এর AC কর্ণ

$\therefore \quad \Delta AEC \simeq \Delta ACF$

অর্থাৎ $\Delta ABE = \frac{1}{2} \square DBEA$

এবং $\triangle AEC = \frac{1}{2} \square AECF$

$\therefore \triangle ABE + \triangle AEC = \frac{1}{2} \square DBEA + \frac{1}{2} \square AECF$

$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \square DBCF.$

**অনুসিদ্ধান্ত** (i) একটি ত্রিভুজ ও একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

**অনুসিদ্ধান্ত** (ii) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়-পদ্ধতির সাহায্যে আমরা যে কোন বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে পারি। মনে কর, ABCDEFA একটি ষড়ভুজ। এখন ইহার মধ্যবর্তী যে কোন একটি বিন্দু O লও। AO, BO, CO, DO, EO, FO যুক্ত করা হইল। এখন ABCD-EFA-এর ক্ষেত্রফল = $\triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COD + \triangle DOE + \triangle EOF + \triangle AOF$. অনুরূপভাবে আমরা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় পদ্ধতির সাহায্যে যে কোন বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে পারি।

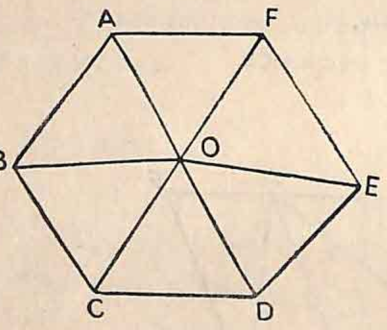



Fig. 50

## অনুশীলনী

1. প্রমাণ কর, রম্বসের ক্ষেত্রফল উহার কর্ণদ্বয়ের গুণফলের অর্ধেক।

2. ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা ট্রাপিজিয়মটিকে দুইটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ট্রাপিজিয়মে বিভক্ত করে।

3. সামান্তরিকের কর্ণের উপর যে কোন বিন্দুর সহিত অপর কৌণিক বিন্দুদ্বয় যুক্ত করিলে কর্ণের উভয়পার্শ্বে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, প্রমাণ কর তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

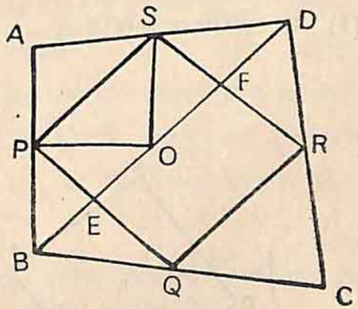
4. ABCD একটি সামান্তরিক, P উহার মধ্যস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ কর, $\triangle APB + \triangle CPD = \triangle APD + \triangle BPC$।

5. কোন সামান্তরিকের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দুর সহিত যে-কোন একজোড়া বিপরীত প্রান্ত-বিন্দুদ্বয় যুক্ত করিলে যে দুইটি বিপরীত ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, প্রমাণ কর, তাহাদের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

6. ABC সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু B। AB ও BC বাহুর মধ্য-বিন্দু যথাক্রমে D এবং E। যদি AE ও CD, F বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর, $\Delta BDE = 3\Delta DEF$।

7. ABCD সামান্তরিকের DC এবং AD বাহুর উপরে যথাক্রমে X ও Y দুইটি বিন্দু। প্রমাণ কর, $\Delta ABX$ এবং $\Delta BYC$-এর ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

8. কোন চতুর্ভুজের বাহু চারিটির মধ্যবিন্দুগুলি যুক্ত করিয়া যে সামান্তরিক উৎপন্ন হয়, প্রমাণ কর, তাহার ক্ষেত্রফল চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।




**আভাস ঃ** O, BD-এর মধ্যবিন্দু

$\Delta POS = \frac{1}{4}\Delta ABD$

$\therefore PS \parallel EF$

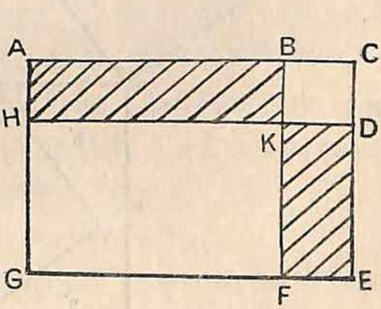
$\therefore \Delta POS = \frac{1}{2}\square PEFS$.

$\therefore \square PEFS = \frac{1}{2}\Delta ABD$

অনুরূপে $\square EQRF = \frac{1}{2}\ \Delta BCD$

$\therefore \square PQRS = \frac{1}{2}ABCD$ চতুর্ভুজ

9. AGEC একটি আয়ত। $HD \parallel AC$ এবং $BP \parallel AG$, প্রমাণ কর, $\square AHKB = \square KFED$।




10. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে ভূমির উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু হইতে উহার সমান দুইটি বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি ভূমির যে কোন প্রান্ত হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের সমান।

11. একটি সুষম ষড়ভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. হইলে তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

12. একটি বর্গাকৃতি উদ্যানের প্রতিদিকের দৈর্ঘ্য 30 মিটার। উহার মাঝখানে 10 মিটার ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি পুকুর আছে। পুকুর ছাড়া উদ্যানটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

## 2. পীথাগোরাসের উপপাদ্য

গ্রীক পণ্ডিত পীথাগোরাসের নামানুসারে এই উপপাদ্যের নাম হইয়াছে। কিন্তু বর্তমানে এই সত্য নিঃসংশয়ে প্রতিষ্ঠিত হইয়াছে যে পীথাগোরাসের জন্মের বহুপূর্বেই ভারত এবং ব্যাবিলনের বহু গণিতজ্ঞেরা নানা ব্যবহারিক ক্ষেত্রে এই উপপাদ্যের প্রয়োগ জানিতেন। প্রাচীন হিন্দুশাস্ত্রের গ্রন্থ শূল্বশাস্ত্রে এই উপপাদ্যের প্রয়োগ দেখিতে পাওয়া যায়।

### পীথাগোরাসের উপপাদ্য

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল উহার অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

### (1) ব্যবহারিক প্রস্তাবনা

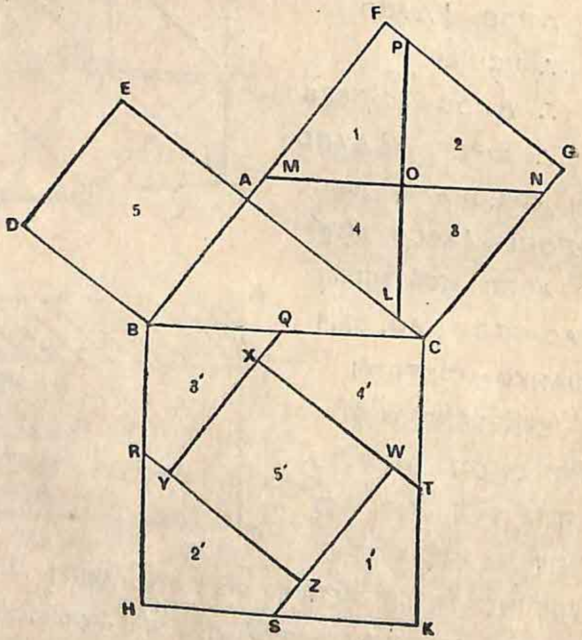



Fig. 51

মনে কর, △ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং ∠A উহার সমকোণ। এই ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর উপর যথাক্রমে ABDE ও ACGF দুইটি বর্গক্ষেত্র এবং BC অতিভুজের উপর BHKC বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর।

দেখাইতে হইবে—

BHKC বর্গের ক্ষেত্রফল = ABDE বর্গের ক্ষেত্রফল + ACGF বর্গের ক্ষেত্রফল।

ACGF বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O দিয়া BC-এর সমান্তরাল MON এমনভাবে অঙ্কিত কর, উহা যেন FAকে M ও CGকে N বিন্দুতে ছেদ করে। আবার O বিন্দুতে MN-এর উপর POL লম্ব অঙ্কন কর, উহা যেন ACকে L বিন্দুতে ও FGকে P বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে ACGF বর্গক্ষেত্রটি MN ও PL রেখাংশ দ্বারা চিত্রে প্রদর্শিত 1, 2, 3, 4 চারিটি চতুর্ভুজে বিভক্ত হইল।

BCKH বর্গক্ষেত্রের CB, BH, HK ও KC বাহু চারিটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে Q, R, S ও T লও। AB-এর সমান্তরাল করিয়া QXY ও SZW রেখাংশ-দ্বয় অঙ্কন কর। AC-এর সমান্তরাল করিয়া TWX ও RYZ রেখাংশদ্বয় টান। এই সমান্তরাল সরলরেখা চারিটি XYZW ক্ষেত্রটি উৎপন্ন করিল। এখন BCKH বর্গক্ষেত্রটি পাঁচটি চতুর্ভুজ 1′, 2′, 3′ ও 4′ এবং XYZW উৎপন্ন করিল।

1, 2, 3, 4কে 1′, 2′, 3′, ও 4′-এর সহিত যথাক্রমে মিলাইলে দেখা যাইবে, প্রত্যেক চতুর্ভুজ অনুরূপ চতুর্ভুজের সহিত সর্বসম এবং দেখা যাইবে, XYZW একটি বর্গক্ষেত্র এবং ইহা ABDE বর্গক্ষেত্রের সহিত সর্বসম।

মোটা কাগজ কাটিয়া চতুর্ভুজগুলির সর্বসমতা পরীক্ষা করিয়া দেখ। দেখা যাইবে, ACGF বর্গক্ষেত্রের চারিটি চতুর্ভুজ 1, 2, 3 ও 4 যথাক্রমে BHKC বর্গক্ষেত্রের 1′, 2′, 3′ ও 4′-এর সহিত সর্বসম।

এখন দেখা যাইতেছে—

1, 2, 3 ও 4 চতুর্ভুজ চারিটি ও 5 বর্গক্ষেত্রটি যথাক্রমে BHKC বর্গক্ষেত্রের 1′, 2′, 3′ ও 4′ চারিটি চতুর্ভুজ ও 5 বর্গক্ষেত্রটির মধ্যে বর্তমান।

∴ BHKC বর্গের ক্ষেত্রফল

= ABDE বর্গের ক্ষেত্রফল + ACGF বর্গের ক্ষেত্রফল।

(2)

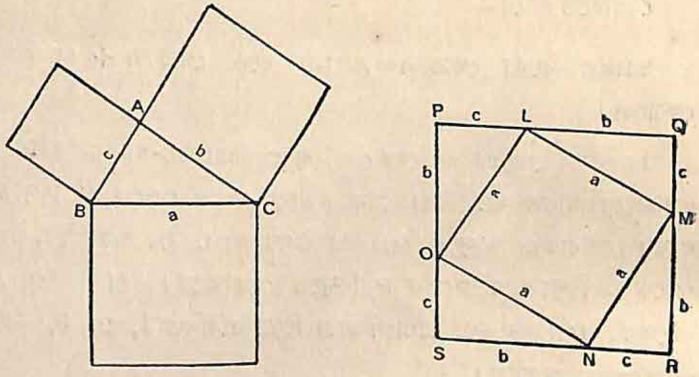



Fig. 52

মনে কর, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং ∠A, ইহার সমকোণ। BC, AC, ও AB-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে যদি $a$, $b$ এবং $c$ একক হয়, তাহা হইলে দেখাইতে হইবে, $b^2+c^2=a^2$।

PQRS একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর যাহার প্রতিটি বাহু $b+c$ একক-এর সমান। PQ, QR, RS এবং SP-এর উপর যথাক্রমে L, M, N ও O বিন্দু চারিটি এমনভাবে লও যাহাতে

PL ≃ QM ≃ RN ≃ SO $=c$ একক।

এবং

LQ ≃ M ≃ NS ≃ OP $=b$ একক।

△ PLO, △ ABC-এর নূতন অবস্থান,

কারণ, ∠P ≃ ∠A = এক সমকোণ,
PO ≃ AC $=b$ একক,
PL ≃ AB $=c$ একক। } ( অঙ্কন অনুযায়ী )

∴ △ABC ≃ △PLO

[ সর্বসমতার বাহু-কোণ-বাহু সর্তানুসারে ]

অনুরূপভাবে △ABC ≃ △QML, RNM = △ ≃ △SON )।

∴ LM ≃ MN ≃ NO ≃ OL ≃ BC $=a$ একক।

∴ বর্গক্ষেত্র PQRS-এর ক্ষেত্রফল

= বর্গক্ষেত্র LMNO-এর ক্ষেত্রফল +

△ABC-এর সমান 4টি ত্রিভুজ

PQRS বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$=(b+c)^2$ [∵ PQ বাহু $=b$ একক $+c$ একক]

$\triangle ABC=\frac{1}{2}.\ b.c=\frac{bc}{2}$

[∵ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা]

$\triangle$ABC-এর সমান 4টি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=4.\frac{bc}{2}$

এবং বর্গক্ষেত্র LMNO $=a^2$ [∵ OL $=a$]

∴ বর্গক্ষেত্র PQRS-এর ক্ষেত্রফল

$$=(b+c)^2=a^2+4.\frac{bc}{2}$$

অর্থাৎ $(b+c)^2=a^2+4.\frac{bc}{2}$

অথবা,

$$b^2+2bc+c^2=a^2+2bc$$

∴ $b^2+c^2=a^2$ [উভয় পক্ষ হইতে $2bc$ বাদ দিলে]

(3)

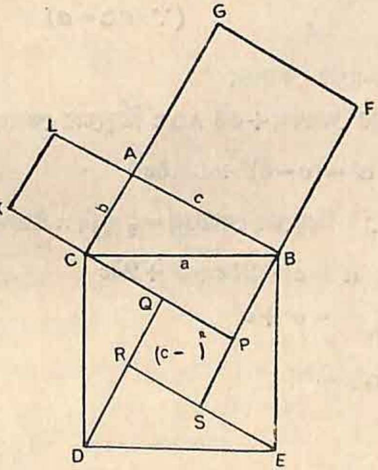



Fig. 53

মনে কর, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং ∠A ইহার সমকোণ।

BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $a$, $b$ ও $c$ একক।

দেখাইতে হইবে, $a^2=b^2+c^2$

AB, BC এবং CA বাহুর উপর যথাক্রমে ABFG, BCDE এবং CALK তিনটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর। AC-এর সমান্তরাল করিয়া BPS এবং DRQ রেখাংশদ্বয় অঙ্কন কর। AB-এর সমান্তরাল করিয়া CQP এবং ESR রেখাংশদ্বয় অঙ্কন কর। ইহাতে BCDE বর্গক্ষেত্রটি পাঁচটি অংশে বিভক্ত হইল। ইহার পাঁচটি অংশের মধ্যে চারিটি সমকোণী ত্রিভুজ ও একটি বর্গক্ষেত্র। ত্রিভুজ ABCকে PCB, SBE, RED ও QDC ত্রিভুজের প্রত্যেকের সাথে মিলাইলে দেখা যাইবে যে, প্রত্যেক ত্রিভুজ অপর ত্রিভুজের সহিত সর্বসম।

$$BP \simeq DR \simeq ES \simeq CQ = b \text{ একক।}$$

এবং

$$PC \simeq QD \simeq SB \simeq RE = c \text{ একক.।}$$

তাহা হইলে,

$$PQ \simeq QR \simeq RS \simeq SP = (c-b) \text{ একক}$$

$\therefore$ PSRQ বর্গের ক্ষেত্রফল $= (c-b)^2$

BCDE বর্গের ক্ষেত্রফল $= a^2$

$(\because BC = a)$

$\therefore$ BCDE বর্গের ক্ষেত্রফল

= PSRQ বর্গের ক্ষেত্রফল + 4টি ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান।

অর্থাৎ, $a^2 = (c-b)^2 + 4.\frac{1}{2}.bc$

( $\because$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা )

যেহেতু $a^2 = c^2 - 2bc + b^2 + 2bc$

$= b^2 + c^2$

$\therefore \quad a^2 = b^2 + c^2$

**উদাহরণ :**

(1) একটি জমির আকৃতি ঠিক সমকোণী ত্রিভুজের মত। উহার সমকোণসংলগ্ন বাহু দুইটি যথাক্রমে 2 মিটার এবং 2·1 মিটার। ত্রিভুজাকৃতি জমির তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজাকার জমি,

এখানে, ∠B = এক সমকোণ,

পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

এখানে, AB = 2 মি., BC = 2·1 মি.

$\therefore \quad AC^2 = 2^2 + 2{\cdot}1^2 = 4 + 4{\cdot}41$

$= 8{\cdot}41$ ব. মি.

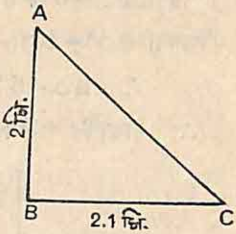



Fig. 54

$\therefore \quad AC = 8{\cdot}41$ ব. মি.-এর বর্গমূল = $\sqrt{8{\cdot}41}$ মি. = 2·9 মি.

(2) 10 মি. দীর্ঘ একটি মই কোন রাস্তার উপর একটি স্থান হইতে রাস্তার এক পার্শ্বের বাড়ীর দেওয়ালে 6 মি. উপরে ঠেকান হইল। মইটিকে ঘুরাইয়া এবং নিম্নপ্রান্ত না সরাইয়া রাস্তার ঠিক বিপরীত পার্শ্বের বাড়ীর দেওয়ালে ঠেকাইলে উহা দেওয়ালের 8 মি. উচুতে লাগে। রাস্তাটির পরিসর কত?

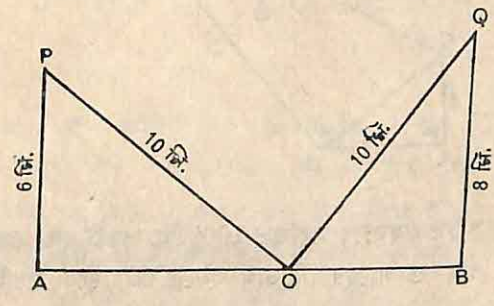



Fig. 55

মনে কর, রাস্তাটির প্রস্থ AB এবং মইটির প্রথম অবস্থান OP এবং মইটির দ্বিতীয় অবস্থান OQ।

$\therefore$ AP = 6 মি., QB = 8 মি. এবং OP = OQ = 10 মি.

এক্ষেত্রে ∠PAO = ∠QBO = এক সমকোণ

$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

PAO সমকোণী ত্রিভুজ হইতে, $OP^2 = AP^2 + AO^2$

অথবা, $10^2 = 6^2 + AO^2$

অথবা, $AO^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$

$\therefore \quad AO = \sqrt{64} = 8$ মি.

আবার, QBO সমকোণী ত্রিভুজ হইতে, $QO^2 = QB^2 + BO^2$

অথবা $10^2 = 8^2 + BO^2$

অথবা $BO^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$

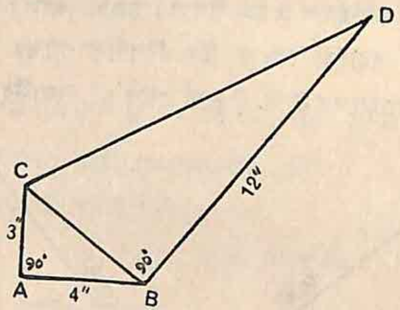
$\therefore$ BO = 6 মি.

$\therefore$ রাস্তাটির পরিসর = AO + OB = 8 মি. + 6 মি. = 14 মি.

## অনুশীলনী

1. একটি সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি 4·8 মি., উহার অতিভুজ ও উচ্চতার অন্তর 3·6 মি., অতিভুজ ও উচ্চতার দৈর্ঘ্য কত ?

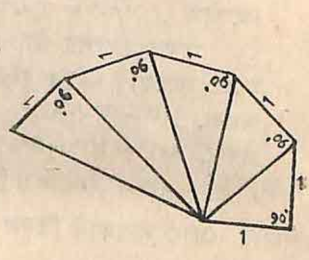
2. চিত্রে BC ও CD-এর দৈর্ঘ্য কত নির্ণয় কর।



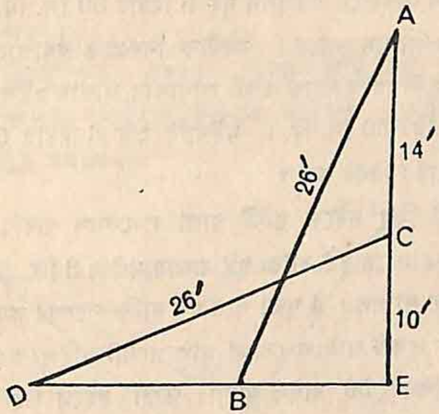

3. ভূমির সহিত লম্বভাবে অবস্থিত 100′ উচ্চ একটি গাছ প্রবল বাতাসের ফলে ভাঙ্গিয়া গেল ও গাছের নিম্নভাগ হইতে 60′ দূরে গাছটির অগ্রভাগ পড়িল। গাছটি কত উচ্চে ভাঙ্গিয়াছিল ?

4. 55′ উচ্চ একটি গম্বুজে একটি পাখি বসিয়াছিল। গম্বুজের ভূমি হইতে 120′ দূরে একজন শিকারী বন্দুকের সাহায্যে পাখিটিকে ঠিক গুলি করিল। বন্দুকের নলের অগ্রভাগ ভূমি হইতে 5′ উচ্চে হইলে, গুলিটিকে কত পথ অতিক্রম করিতে হইয়াছিল ?

5. প্রদর্শিত পরিমাপ অনুসারে স্কেল এবং চাঁদার সাহায্যে চিত্রটি অঙ্কন কর। এই চিত্রটি হইতে স্কেলের সাহায্যে $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ ও $\sqrt{6}$-এর মান (আসন্ন) নির্ণয় কর।



6. 26′ দীর্ঘ একখানা মই-এর অগ্রভাগ কোন প্রাচীর-গাত্রে 24′ উপরে লাগান ছিল। মইটির অগ্রভাগ 14′ নামাইয়া দিলে উহার নিম্নভাগ কতটা সরিয়া যাইবে ?




7. ABCD একটি ট্রাপিজিয়ম। উহার AD ও BC সমান্তরাল এবং AB ও AD পরস্পর লম্ব। যদি AD = 4 সে. মি., BC = 6·4 সে. মি. এবং AB = 3·2 সে. মি. হয়, তাহা হইলে DC-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

8. কোন $\Delta ABC$-এর A হইতে BC-এর উপর AD লম্ব। প্রমাণ কর,

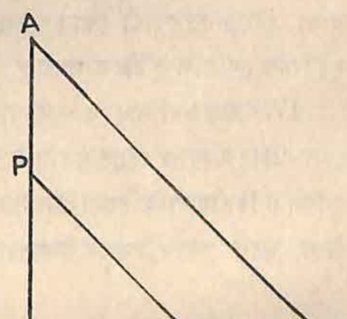
$$AB^2 \sim AC^2 = BD^2 \sim CD^2$$

9. ABC ত্রিভুজে AB এবং AC-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P এবং Q এবং $\angle B$ = এক সমকোণ।

প্রমাণ কর—

(i) $AC^2 = AQ^2 + 3QC^2$

(ii) $AP^2 + PQ^2 + QC^2 = {}^1AC^2$



10. কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে 84 সে. মি. ও 135 সে. মি.। সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

11. রাস্তার একধারে একখানি মই 6 মিটার 30 সে. মি. উচ্চে অবস্থিত একটি জানালায় লাগান আছে। মইটিকে নিম্নপ্রান্ত যথাস্থানে রাখিয়া অপর প্রান্ত রাস্তার ঠিক বিপরীত পার্শ্বে একটি জানালায় লাগান হইল। এই জানালা পর্যন্ত উচ্চতা 5 মি. 60 সে. মি.। মইখানি যদি 6 মিটার 50 সে. মি. লম্বা হয় তবে ঐ রাস্তার পরিসর কত?

12. একটি বিন্দু হইতে দুইটি রাস্তা সমকোণে অবস্থিত আছে। ঐ বিন্দু হইতে একই সময়ে দুই ব্যক্তি দুই রাস্তায় ঘণ্টায় 3 কি. মি. এবং $3\frac{1}{2}$ কি. মি. বেগে হাঁটিতে লাগিল। 4 ঘণ্টা পরে দুই ব্যক্তি পরস্পর কত দূরে থাকিবে?

13. কোন একটি জাহাজ সোজা দক্ষিণে 33 মাইল অগ্রসর হইবার পর উহা সোজা পশ্চিমে 56 মাইল যায়। তাহা হইলে উহা প্রথম যাত্রাস্থল হইতে কত দূরে আছে?

14. B, A হইতে পূর্বে আছে কিন্তু উহার দূরত্ব অজানা। C, B হইতে ঠিক দক্ষিণে এবং উহার দূরত্ব 55 মিটার। A ও C-এর মধ্যে দূরত্ব 73 মিটার। AB-এর দূরত্ব নির্ণয় কর।

15. প্রতি ঘণ্টায় কোনও একটি উড়ো জাহাজ 150 কি.মি. বেগে সোজা উত্তর-পশ্চিমে যাত্রা করে এবং প্রবল বাতাসে ঘণ্টায় 60 কি. মি. হিসাবে উত্তর-পূর্বে বাহিত হয়। যাত্রাস্থল হইতে 5 ঘণ্টা পরে উহার দূরত্ব নির্ণয় কর।

16. একটি বন্দুকের গুলি 9000 মি. পর্যন্ত যাইতে পারে এবং একটি রেল-রাস্তা হইতে বন্দুকধারী কোন লোকের দূরত্ব 5000 মি.। রেলরাস্তার কত দূর পর্যন্ত সে গুলি ছুঁড়িতে পারে?

17. উত্তর-দক্ষিণে ও পূর্ব-পশ্চিমে বিস্তৃত দুইটি রাস্তার ছেদবিন্দু O। বেলা 2টার সময় O হইতে ঘণ্টায় 5 কি. মি. বেগে একজন লোক পূর্বদিকে যাত্রা করিল। দ্বিতীয় ব্যক্তি বেলা 2টা 30 মিনিট-এর সময় ঘণ্টায় 6 কি. মি. বেগে উত্তর দিকে গেল। কখন উভয়ের ব্যবধান 5 কি. মি. হইবে?

# পঞ্চম অধ্যায়

## নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ বা চতুর্ভুজ অঙ্কন

এই অধ্যায়ে আমরা নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট কয়েকটি ত্রিভুজ বা চতুর্ভুজ অঙ্কন প্রণালী শিখিব।

**নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কন করিতে হইবে যাহার একটি কোণ কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান।**

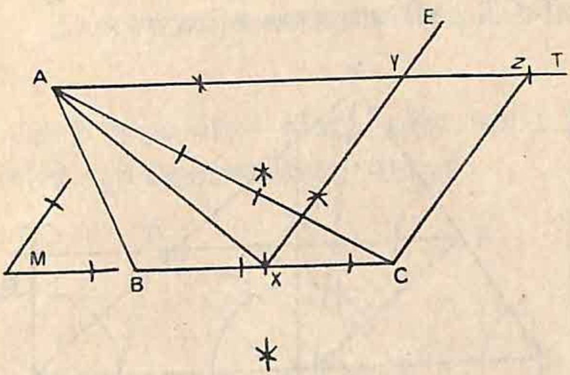



Fig. 56

মনে কর, ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং $\angle M$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। $\triangle$ ABC-এর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করিতে হইবে যাহার কোন কোণ নির্দিষ্ট $\angle M$-এর সমান হইবে।

**অঙ্কন :** BCকে X বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। X বিন্দুতে $\angle M$-এর সমান করিয়া $\angle EXC$ অঙ্কন কর। A বিন্দুতে BC-এর সমান্তরাল করিয়া AT একটি সরলরেখা অঙ্কন কর ( $\angle ACB$-এর সমান করিয়া A বিন্দুতে $\angle CAT$ অঙ্কন কর )। মনে কর, AT রেখা XEকে Y বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন XC-এর সমান করিয়া YT হইতে YZ অংশ কাটিয়া লও। Z এবং C সরলরেখা দ্বারা যুক্ত কর। XYZC হইল নির্ণেয় সামান্তরিক।

**প্রমাণ :** AX যুক্ত কর।

$\because$ X বিন্দু BC-এর মধ্যবিন্দু

∴ △AXC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ △ABC-এর ক্ষেত্রফল।

সামান্তরিক XYZC ও △AXC একই ভূমি XC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AT ও BC-এর মধ্যে অবস্থিত বলিয়া,

$\frac{1}{2}$. ▱XYZC-এর ক্ষেত্রফল = △ AXC-এর ক্ষেত্রফল
$= \frac{1}{2}$△ABC-এর ক্ষেত্রফল,

∴ ▱XYZC-এর ক্ষেত্রফল = △ABC-এর ক্ষেত্রফল,
∠YXC = ∠M (অঙ্কন অনুযায়ী)।

∴ ▱XYZCই অভীষ্ট সামান্তরিক।

**কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর।**

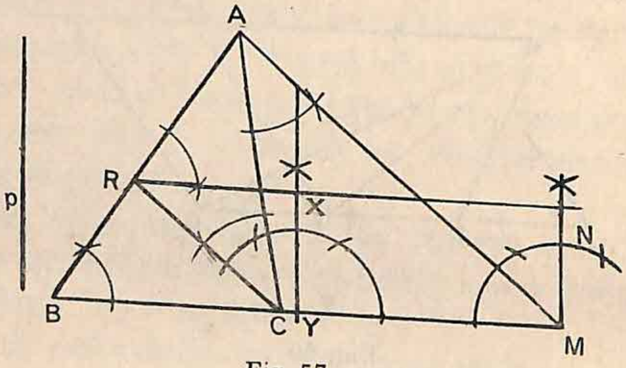



Fig. 57

মনে কর, ABC প্রদত্ত ত্রিভুজ ; $p$ প্রদত্ত দৈর্ঘ্য। এমন একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে যাহার একটি বাহু $p$-এর সমান এবং ক্ষেত্রফল △ABC-এর সমান।

**অঙ্কন :** BC বাহুকে বর্ধিত করিয়া $2p$-এর সমান দৈর্ঘ্য লইয়া উহা হইতে BM রেখাংশ কাটিয়া লও। সুতরাং BM $= 2p$। AM যোগ কর। C দিয়া AM-এর সমান্তরাল করিয়া CR সরলরেখা অঙ্কন কর (ইহার জন্য ∠MAC-এর সমান করিয়া ∠ACR অঙ্কন কর)। মনে কর CR, ABকে R বিন্দুতে ছেদ করিল। R দিয়া BM-এর সমান্তরাল করিয়া RN সরলরেখা টান। BM-এর মধ্যবিন্দু Yতে লম্ব YX অঙ্কন কর। মনে কর YX, RNকে X বিন্দুতে ছেদ করিল। Mবিন্দুতে XY-এর সমান্তরাল করিয়া MN টান (∠Y-এর সমান ∠M অঙ্কন কর)। মনে কর, MN সরলরেখা RNকে N বিন্দুতে ছেদ করিল।

∴ XYMN হইল অভীষ্ট আয়তক্ষেত্র।

**প্রমাণ :** RM যুক্ত কর।

আয়তক্ষেত্র XYMN = △BRM [∵ উহাদের উচ্চতা সমান, ▭XYMN-এর ভূমি $p$, এবং △BRM-এর ভূমি $2p$ ]

আবার △RAC = △RMC

[ একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত ]

উভয় পক্ষে △RBC যোগ করিলে

△RAC + △RBC = △RMC + △RBC

△ABC = △RBM = আয়তক্ষেত্র XYMN।

**এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।**

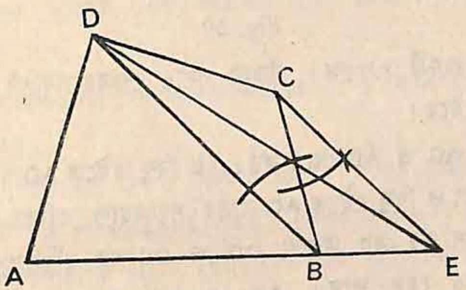



Fig. 58

মনে কর, ABCD একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ ; ইহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

**অঙ্কন :** BD যোগ কর। ABCD চতুর্ভুজের C বিন্দুতে BD বাহুর সমান্তরাল করিয়া CE সরলরেখা টান (ইহার জন্য ∠DBC-এর সমান করিয়া ∠BCE অঙ্কন কর)। CE সরলরেখা বর্ধিত AB বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। DE যোগ কর। ইহাতে ADE ত্রিভুজ উৎপন্ন হইল। উহাই অভীষ্ট ত্রিভুজ।

**প্রমাণ :** ∵ DBE ও DBC ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি DB-এর উপর দণ্ডায়মান এবং BD ও CE সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত,

∴ $\triangle DBE = \triangle DBC \cdots$ (1)

(1) নং সমীকরণের উভয়পার্শ্বে $\triangle ABD$ যোগ কর।

∴ $\triangle ABD + \triangle DBE = \triangle ABD + \triangle DBC$

অর্থাৎ $\triangle ADE$-এর ক্ষেত্রফল = চতুর্ভুজ ABCD-এর ক্ষেত্রফল

**কোন নির্দিষ্ট ঋজুরেখক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে।**

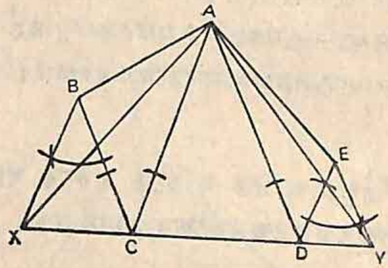



Fig. 59

ABCDE একটি পঞ্চভুজ। উহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে।

**অঙ্কন :** AC ও AD যোগ কর। E বিন্দু হইতে AD বাহুর সমান্তরাল করিয়া EY এবং B বিন্দু হইতে AC বাহুর সমান্তরাল করিয়া BX সরলরেখা এরূপভাবে অঙ্কন কর যেন উহারা CD ও DC-এর বর্ধিতাংশকে যথাক্রমে Y ও X বিন্দুতে ছেদ করে। AX ও AY যুক্ত কর। এখানে YXA ত্রিভুজটি ABCDE ঋজুরেখক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট হইল। অর্থাৎ AXY ত্রিভুজটি অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

**প্রমাণ :** $\triangle ADY$-এর ক্ষেত্রফল = $\triangle ADE$-এর ক্ষেত্রফল

[ ∵ একই ভূমি এবং একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত ]

আবার, $\triangle ACX$-এর ক্ষেত্রফল = $\triangle ABC$-এর ক্ষেত্রফল,

[ ∵ একই ভূমি এবং একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত ]

এখন, $\triangle AXY$-এর ক্ষেত্রফল

= ($\triangle ACX + \triangle ACD + \triangle ADY$)-এর ক্ষেত্রফল

= ($\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE$)-এর ক্ষেত্রফল

= ঋজুরেখ ABCDE-এর ক্ষেত্রফল।

## অনুশীলনী

1. একটি নির্দিষ্ট ষড়ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

2. একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

3. 2" বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর। উহার ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

4. একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

5. একটি সামান্তরিকের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর, যাহার এক বাহু একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান হইবে এবং কোন একটি কোণ নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

6. একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর, যেন তাহার দুইটি সন্নিহিত বাহু দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হয়।

7. দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অন্তরের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর।

8. একটি বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক পরিমাণ একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর।

9. MNOP সামান্তরিকের $MN=2{\cdot}5''$, $OP=1{\cdot}6''$ এবং $\angle A=60^\circ$; ইহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি রম্বস অঙ্কন কর এবং ইহার বাহুর মাপ নির্ণয় কর।

10. একটি সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন এক অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিনগুণ হয়।

11. একটি সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

12. কোনও ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে 3·5 সে. মি., 4·5 সে. মি. এবং 4·7 সে. মি. ও একটি কোণ 75°। এই ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর, যেন তাহার একটি কোণ ঐ নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

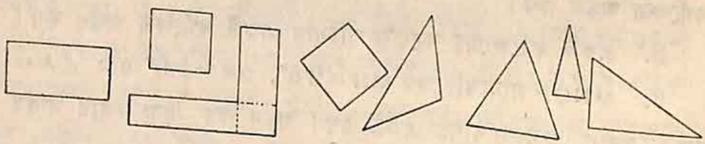
# ষষ্ঠ অধ্যায়

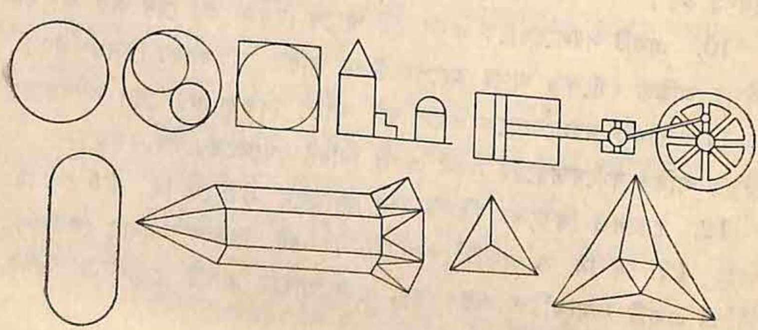
## পরিমিতি

প্রয়োজনের তাগিদেই আমাদের জ্ঞানের বিকাশ ঘটে এই মুহূর্তে আমরা যাহা জানিয়াছি হয়ত কালই অনুভব করিব যে এই জ্ঞান যথেষ্ট নহে। মানুষ যখন দূরত্ব মাপিবার উপায় উদ্ভাবন করিল তখন হয়ত জমি জরিপের প্রয়োজন বোধ করে নাই। কিন্তু ক্রমে তাহার প্রয়োজন হইল ক্ষেত্র পরিমাপ করিবার এবং ধীরে ধীরে নানারূপ জ্যামিতিক আকার সম্বন্ধীয় জ্ঞান-ভাণ্ডারের প্রসার ঘটিল।

সহজেই আজ অনুমান করিতেছি যে ঐ সমস্ত জ্ঞান আমাদের উন্নতির ভিত্তি। আমাদের চতুর্দিকে নানারকম জ্যামিতিক বস্তু সর্বদাই দেখিতেছি এবং ইহাদের সম্বন্ধে জ্ঞান আমাদের অবশ্যই গ্রহণীয় তাহা উপলব্ধি করিতেছি। জ্যামিতিক বস্তুর মাত্রা, ক্ষেত্রের পরিমাপ, আয়তন সম্বন্ধীয় জ্ঞান **পরিমিতির** আলোচ্য বিষয়বস্তু। এই জ্ঞান আমাদের বিজ্ঞানীদের, বাস্তুকারদের, স্থপতিদের, এমন কি সাধারণ মানুষের জীবনেও যে সর্বদা নানা ভাবে সাহায্য করিতেছে তাহা উল্লেখের অপেক্ষা রাখে না।

আমরা এই অধ্যায়ে বিশেষ কয়েকটি সামতলিক ক্ষেত্র সম্বন্ধে আলোচনা করিব। এই সামতলিক ক্ষেত্রগুলি হইল: (1) আয়তক্ষেত্র, (2) বর্গক্ষেত্র, (3) ত্রিভুজ এবং (4) বৃত্ত।





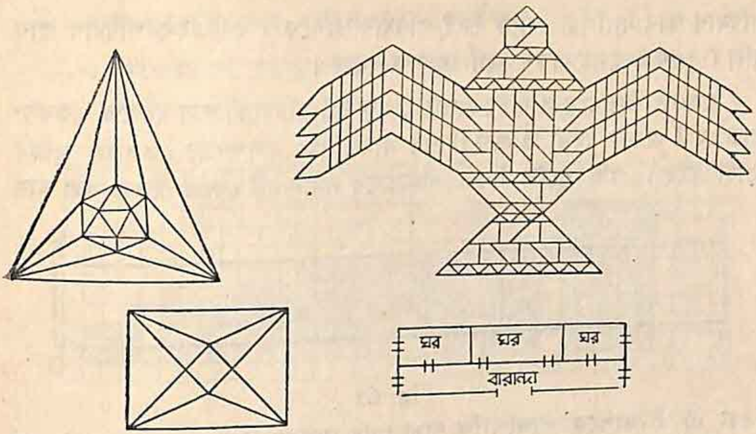



Fig. 60

উপরের প্রতিটি জ্যামিতিক চিত্রই আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র, ত্রিভুজ এবং বৃত্তের সাহায্যে সৃষ্ট হইয়াছে। তোমরা নিশ্চয়ই আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র, ত্রিভুজ এবং বৃত্ত কাহাকে বলে জান।

I. ইহাদের পরিসীমা এবং ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে আলোচনা করিব। কোন সামতলিক ক্ষেত্রের সীমারেখার উপর যে কোন বিন্দু হইতে শুরু করিয়া এই সীমারেখা বরাবর ক্ষেত্রটিকে একবার পূর্ণ প্রদক্ষিণ করিয়া ঐ যাত্রাবিন্দুতে ফিরিয়া আসিলে যে দূরত্ব অতিক্রান্ত হয় তাহাকে ঐ ক্ষেত্রের **পরিসীমা** বলি।

কোন সামতলিক ক্ষেত্র কোন সমতলে সম্পূর্ণরূপে স্থাপনের পর সমতলে যতটা স্থান ব্যাপিয়া থাকে সেই পরিমাণ স্থানকে ঐ ক্ষেত্রের **ক্ষেত্রফল** বলি।

## II. পরিসীমা ও ক্ষেত্রফলের একক

পরিসীমা পরিমাপ বলিতে আমরা দূরত্ব পরিমাপ বুঝি ; পরিসীমার একক তাই স্পষ্টতই দৈর্ঘ্যের একক হইবে।

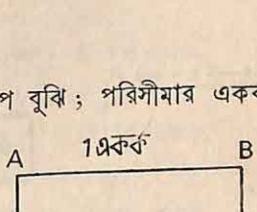



Fig. 61

ক্ষেত্রফল বলিতে আমরা বুঝি ক্ষেত্রের পরিমাণ। কোন একটি একক দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র সমতলে যে পরিমাণ স্থান জুড়িয়া থাকে সেই পরিমাণ স্থানকে এক বর্গ একক পরিমাণ ক্ষেত্র বলি ; যেমন, 1 একক দৈর্ঘ্য এবং 1 একক প্রস্থবিশিষ্ট ABCD বর্গক্ষেত্রটি পাতার উপরে যতটা

পরিমাণ স্থান ব্যাপিয়া আছে সেই পরিমাণ স্থানকে 1 বর্গ একক পরিমাণ স্থান বলি। ক্ষেত্রফলের একক **বর্গ একক** হইবে।

প্রসঙ্গত উল্লেখ করা যাইতে পারে, এক বর্গ পরিমাণ স্থান বলিতে কেবলমাত্র যে 1 একক দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বিশিষ্ট সামতলিক বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বুঝিব তাহা নহে। যদি পূর্বের চিত্রে ABCDকে সমান 3টি ক্ষেত্রে বিভক্ত করা যায়

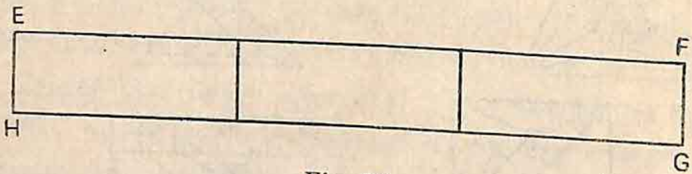



Fig. 62

এবং ঐ 3 অংশকে পাশাপাশি রাখা যায় তখনও ক্ষেত্রের পরিমাণ 1 বর্গ এককই থাকিবে। মনে কর, এই তিন অংশ দিয়া EFGH ক্ষেত্রটি (Fig. 62) হইতে পারে। ইহার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ পূর্বের তুলনায় আর 1 একক নাই, বর্তমানে ইহার দৈর্ঘ্য 3 একক এবং প্রস্থ $\frac{1}{3}$ একক, কিন্তু ক্ষেত্রফল 1 বর্গ একক।

## III. আয়তক্ষেত্র এবং বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা

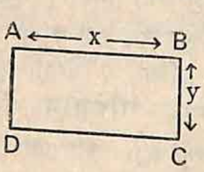



Fig. 63

মনে কর, ABCD আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $x$ একক এবং প্রস্থ $y$ একক।

সুতরাং AB $= x$ একক $=$ DC

এবং BC $= y$ একক $=$ AD

ABCD আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা

$=$ AB $+$ BC $+$ CD $+$ DA

$= x+y+x+y$ একক

$= 2\ (x+y)$ একক

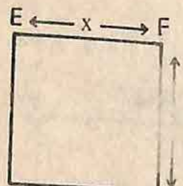



Fig. 64

| আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা $= 2$ ( দৈর্ঘ্য $+$ প্রস্থ) একক |
|---|

মনে কর, EFGH বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $x$ একক

$\therefore$ EF $\simeq$ FG $\simeq$ GH $\simeq$ HE $= x$ একক

EFGH বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $=$ EF $+$ FG $+$ GH $+$ HE

$= x+x+x+x$ একক

$= 4x$ একক

| বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $= 4 \times$ বাহুর দৈর্ঘ্য একক |
|---|

## IV. আয়তক্ষেত্র এবং বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

(A) মনে কর, নীচের ছক-কাগজের প্রতি ক্ষুদ্রতম ঘরের ক্ষেত্রফল 1 বর্গ একক। এখন ঘর গুনিয়া যদি দেখা যায়, তবে দেখা যাইবে :

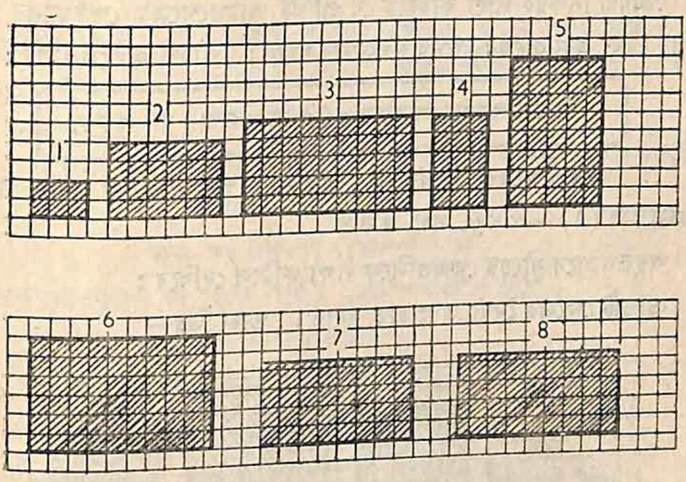



Fig. 65

1 নং আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = 3 একক, প্রস্থ = 2 একক এবং
ক্ষেত্রফল = 6 বর্গ একক,

2 নং ,, দৈর্ঘ্য = 6 একক, প্রস্থ = 4 একক এবং
ক্ষেত্রফল = 24 বর্গ একক,

3 নং ,, দৈর্ঘ্য = 9 একক, প্রস্থ = 5 একক এবং
ক্ষেত্রফল = 45 বর্গ একক,

4 নং ,, দৈর্ঘ্য = 3 একক, প্রস্থ = 5 একক এবং
ক্ষেত্রফল = 15 বর্গ একক,

5 নং ,, দৈর্ঘ্য = 5 একক, প্রস্থ = 8 একক এবং
ক্ষেত্রফল = 40 বর্গ একক,

6 নং ,, দৈর্ঘ্য = $9\frac{1}{2}$ একক, প্রস্থ = 6 একক এবং
ক্ষেত্রফল = $(54+6\times\frac{1}{2})$ বর্গ একক
= 57 বর্গ একক,

7 নং ,, দৈর্ঘ্য = 8 একক, প্রস্থ = $4\frac{1}{2}$ একক এবং
ক্ষেত্রফল = $(32+8\times\frac{1}{2})$ বর্গ একক
= 36 বর্গ একক,

8 নং আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $=8\frac{1}{2}$ একক, প্রস্থ $=4\frac{1}{2}$ একক এবং

ক্ষেত্রফল $=(32+12\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$ বর্গ একক

$=38\frac{1}{4}$ বর্গ একক

তোমরা নিশ্চয়ই লক্ষ্য করিয়াছ যে প্রতিটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের মান উহার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের মানের গুণফলের সমান। আমরা বলিতে পারি :

| |
|---|
| আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ( দৈর্ঘ্য × প্রস্থ ) বর্গ একক |

∴ অয়েতক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $=x$ একক, প্রস্থ $=y$ একক হইলে উহার **ক্ষেত্রফল (A) $=x\times y$, বর্গ একক।**

অনুরূপভাবে নীচের ক্ষেত্রগুলিকে লক্ষ্য করিলে দেখিবে :

প্রতিটি ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ সমান। তাহা ভিন্ন—

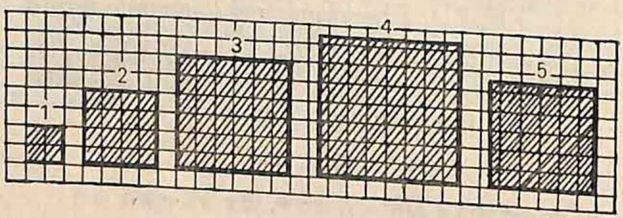



Fig. 66

1 নং বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বা প্রস্থ $=2$ একক, এবং ক্ষেত্রফল $=4$ বর্গ একক,
2 নং বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বা প্রস্থ $=4$ একক, এবং ক্ষেত্রফল $=16$ বর্গ একক,
3 নং বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বা প্রস্থ $=6$ একক, এবং ক্ষেত্রফল $=36$ বর্গ একক,
4 নং বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বা প্রস্থ $=7$ একক,

এবং ক্ষেত্রফল $=(49+14\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$ বর্গ একক,

$=56\frac{1}{4}$ বর্গ একক

5 নং বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বা প্রস্থ $=5\frac{1}{2}$ একক,

এবং ক্ষেত্রফল $=(25+10\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$ বর্গ একক,

$=30\frac{1}{4}$ বর্গ একক।

তোমরা নিশ্চয়ই লক্ষ্য করিয়াছ, প্রতি সময়েই বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের মান উহার বাহুর ( দৈর্ঘ্য বা প্রস্থ ) বর্গের মানের সমান। আমরা বলিতে পারি :

| |
|---|
| বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ( বাহুর বর্গ ) বর্গ একক |

সুতরাং বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বা প্রস্থ $= x$ একক হইলে

**উহার ক্ষেত্রফল (A) $= x^2$ বর্গ একক।**

## (B) কর্ণের দৈর্ঘ্যের সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয়

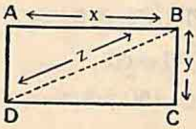



Fig. 67

ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় DB এবং AC (তোমরা জান, আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সর্বদা সমান হয়)।

মনে কর, ABCD-এর দৈর্ঘ্য $= x$ একক এবং প্রস্থ $= y$ একক,

এবং কর্ণ DB-এর দৈর্ঘ্য $= z$ একক

সমকোণী ত্রিভুজের ধর্ম হইতে পাই : $DB^2 = BC^2 + DC^2$

বা, $z^2 = y^2 + x^2$

$\therefore$ (i) $x^2 = z^2 - y^2$ বা, (ii) $y^2 = z^2 - x^2$,

অর্থাৎ, $x = \sqrt{z^2 - y^2}$ বা, $y = \sqrt{z^2 - x^2}$

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= x \times \sqrt{z^2 - x^2}$ বর্গ একক,

বা $y \times \sqrt{z^2 - y^2}$ বর্গ একক।

সুতরাং বলিতে পারি :

> আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ দৈর্ঘ্য $\times \sqrt{\text{কর্ণের বর্গ} - \text{দৈর্ঘ্যের বর্গ}}$, বর্গ একক
> $=$ প্রস্থ $\times \sqrt{\text{কর্ণের বর্গ} - \text{প্রস্থের বর্গ}}$, বর্গ একক

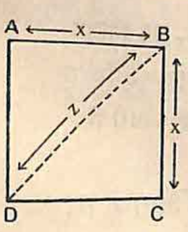



Fig. 68

ABCD বর্গক্ষেত্রের একটি কর্ণ BD।

মনে কর, $AB = x$ একক $= BC$

এবং $BD = z$ একক,

সমকোণী ত্রিভুজের ধর্ম হইতে পাই :

$BD^2 = BC^2 + DC^2$

বা, $z^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$

$$\therefore x^2 = \frac{z^2}{2}$$

কিন্তু বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= x^2$ বর্গ একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{z^2}{2}$ বর্গ একক।

সুতরাং বলিতে পারি :

> বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{\text{কর্ণের বর্গ}}{2}$, বর্গ একক।

**উদাহরণ 1 :** ABCDEFGH ক্ষেত্রটির প্রতিটি সন্নিহিত বাহু পরস্পর লম্ব এবং BC = 30 মিটার = GF, AH = 70 মি. = DE, AC = 50 মিটার = GE, CD = 35 মি. = GH

(i) ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর,

(ii) ক্ষেত্রটির পরিসীমা কত হইবে ?

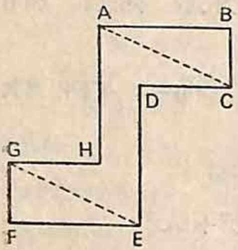



Fig. 69

**সমাধান :** ABCDEFGH ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল

= আয়তক্ষেত্র ABCQ-এর ক্ষেত্রফল + আয়তক্ষেত্র QDPH-এর ক্ষেত্রফল + আয়তক্ষেত্র GPEF-এর ক্ষেত্রফল

$=(BC\sqrt{AC^2-BC^2})+(QD \times DP)+(GF\sqrt{GE^2-GF^2})$

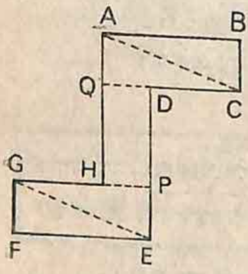



Fig. 70

এখন $QD = QC - CD = AB - CD$

$=\sqrt{AC^2-BC^2}-CD$

$=\sqrt{50^2-30^2}-35$ মিটার

$=40-35$ মিটার $=5$ মিটার

এবং $DP = DE - PE = DE - GH = (70-30)$ মি. $= 40$ মি.

$\therefore$ ABCDEFGH-এর ক্ষেত্রফল

$=(30 \times \sqrt{50^2-30^2})+(5 \times 40)+(30\sqrt{50^2-30^2})$ ব. মি.

$=2 \times 30 \times 40 + 5 \times 40$ ব. মি. $=2400+200=2600$ ব. মি.

(ii) ক্ষেত্রটির পরিসীমা

$= AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HA$

এখানে $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{50^2-30^2}=40$ মি.

অনুরূপে, $EF = 40$ মি.

$\therefore$ পরিসীমা $=2(AB+BC+CD+DE)$
$=2(40+30+35+70)$ মি.
$=2\times175$ মি. $=350$ মি.

**উদাহরণ 2 :** একটি আয়তাকার পার্কের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ যথাক্রমে $x$ এবং $y$ একক, ইহার বাহিরে চতুর্দিকে $z$ একক চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**সমাধান :** মনে করি, ABCD আয়তাকার পার্ক, যাহার

দৈর্ঘ্য $=AB\cong DC=x$ একক,
প্রস্থ $=BC\cong AD=y$ একক,
উহার বাহিরে চতুর্দিকে $z$ একক চওড়া একটি রাস্তা আছে।

মনে করি, রাস্তাসহ আয়তাকার ক্ষেত্রটি EFGH

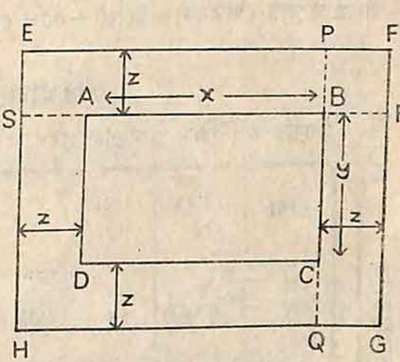



Fig. 71

EFGH-এর দৈর্ঘ্য $EF=SR=SA+AB+BR=z+x+z$
$=x+2z$ একক

এবং উহার প্রস্থ, $FG=PQ=PB+BC+CQ=z+y+z$
$=y+2z$ একক,

রাস্তার ক্ষেত্রফল = EFGH-এর ক্ষেত্রফল − ABCD-এর ক্ষেত্রফল
$=(x+2z)(y+2z)-xy$ বর্গ একক।
$=xy+2z(x+y)+4z^2-xy$ বর্গ একক
$=2z(x+y+2z)$ বর্গ একক।

**উদাহরণ 3 :** একটি বাক্সের বাহির হইতে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে ক্ষেত্রফল $a$, $b$ এবং $c$ একক। উহার বাহিরের সমগ্র তলগুলির মোট ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

**সমাধান :** বাক্সটির দৈর্ঘ্য বরাবর উল্লম্ব পার্শ্বতল দুইটির ক্ষেত্রফল

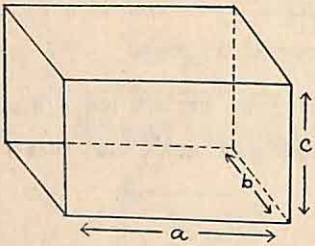



Fig. 72

$=2.a\times c$ ব একক,

বাক্সটির প্রস্থ বরাবর উল্লম্ব পার্শ্বতল দুইটির ক্ষেত্রফল

$=2.b\times c$ ব. একক

এবং বাক্সটির ভূমি এবং শীর্ষতলের ক্ষেত্রফল

$=2.a\times b$ ব. একক

সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $=2(ab+bc+ca)$ ব. একক।

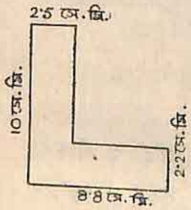
## প্রশ্নমালা 1.

1. নিম্নের * চিহ্নিত স্থানগুলি পূরণ কর :

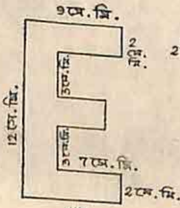
| আয়তক্ষেত্রের | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | দৈর্ঘ্য | 14·75 মি. | 1·27 মি. | * | 3$\frac{1}{3}$ গজ | * | 9 কি. মি. 8 মি. |
| | প্রস্থ | 9 মি. | * | 3$\frac{1}{2}$ ফু | 5 গজ 1·1 ফু | 95 5 মি. | * |
| | ক্ষেত্রফল | 132·75 ব. মি. | 101·6 ব. মি. | 42 ব. ফু | * | 57·3 হেক্টার | 4509 হেক্টার 40 আর 48 ব.মি. |

2. নীচের সামতলিক ক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

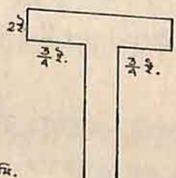
[ (ii) নং চিত্রের ঠিক মাঝ বরাবর অনুভূমিক প্রস্থ 5·5 সে. মি., (iii) নং চিত্রের উচ্চতা 12 ইঞ্চি এবং (vii) নং চিত্রে BD এবং DF কর্ণবিশিষ্ট চতুর্ভুজদ্বয় বর্গক্ষেত্র। ]



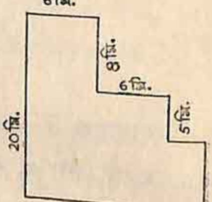

(i)



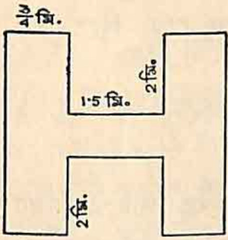

(ii)



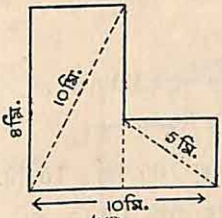

(iii)



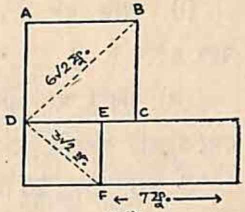

(iv)




(V)



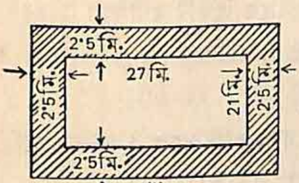

(VI)



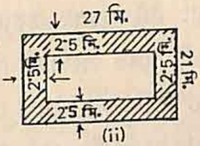

(vii)

( প্রতি ক্ষেত্রের সন্নিহিত বাহুগুলি পরস্পর লম্ব )

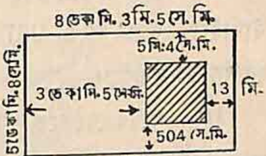
3. রেখাঙ্কিত স্থানগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ঃ



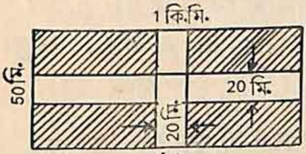

(i)



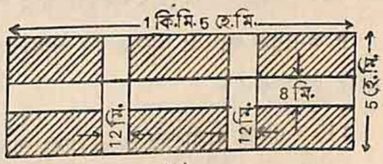

(ii)




(iii)



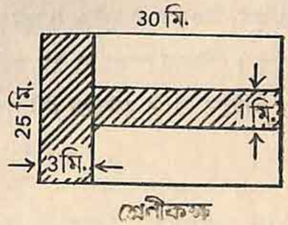

(iv)




(v)

4. একটি বর্গাকার ধানক্ষেতের ক্ষেত্রফল 4 হেক্টার 8·04 আর, উহার পরিসীমা কত হইবে ?

5. একটি শ্রেণীকক্ষের মাপ 30 মি. × 25 মি. ; এবং প্রতি ছাত্রের আসনের জন্য 8 বর্গমিটার পরিমাণ স্থান লাগে। পার্শ্বের শ্রেণীকক্ষের চিত্র হইতে নির্ণয় কর যে খালি স্থানে ছাত্রদের জন্য কয়টি আসন বসানো যাইতে পারে ?




শ্রেণীকক্ষ

6. একটি ফুটবল মাঠের পরিসীমা 310 মি. এবং উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 20 : 11 ; ফুটবল মাঠটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

7. একটি আয়তাকার পাটক্ষেতের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের অনুপাত 4 : 3, এবং উহার কোণাকুণি দৈর্ঘ্য 3 কি. মি. ; তাহা হইলে

(i) প্রতি দশ মিটার 45 পয়সা হিসাবে চতুর্দিকে বেড়া দিতে কত খরচ হইবে ?

(ii) যদি 1 আর পরিমাণ স্থানে 90 কি. গ্রা. পাট উৎপন্ন হয় তবে ঐ ক্ষেতে মোট কত কি. গ্রা. পাট উৎপন্ন হয় ?

8. 80 মি. × 20 মি. এবং 105 মি. × 15 মি. দুই খণ্ড জমিতে আলুর চাষ করিয়া দেখা গেল যে আর প্রতি 95 কি. গ্রা. আলু উৎপন্ন হইয়াছে এবং প্রতি কুইন্টালে খরচ পড়িয়াছে 40 টাকা। তবে ঐ দুই খণ্ড জমিতে কত পরিমাণ আলু উৎপন্ন হইয়াছে এবং কত টাকা খরচ হইয়াছে নির্ণয় কর।

9. প্রতি বর্গ মিটার 1 টা. 50 পয়সা হিসাবে একটি বর্গাকার উঠান বাঁধাইতে খরচ পড়ে 937টা. 50 পয়সা, উহার চারিদিকে 5 মি. অন্তর ফুলের টব বসাইতে হইলে কয়টি টবের প্রয়োজন ?

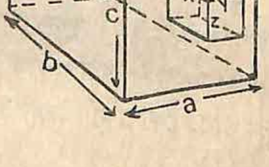
10. ঘরের মেঝেতে কার্পেট বিছাইয়া দেখা গেল, চারিদিকে 3 ফুট চওড়া স্থান অনাবৃত রহিয়াছে। মেঝের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ যদি 30 ফুট এবং 20 ফুট হয়, তবে অনাবৃত স্থানের ক্ষেত্রফল কত ?

ঐ অনাবৃত স্থান 2 মিটার বর্গ পরিমাণ টালি দিয়া আবৃত করিতে কয়টি টালির প্রয়োজন ?

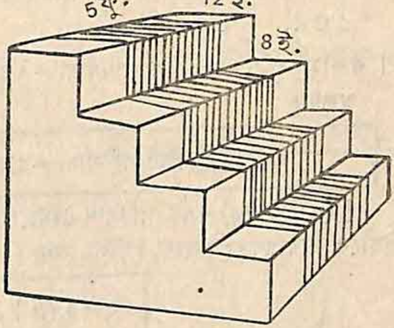
11. একটি বাগানের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ যথাক্রমে 140 ফুট এবং 120 ফুট ; উহার চারিধারে বাহির দিকে সমান চওড়া একটি রাস্তা নির্মাণ করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল বাগানের $\frac{9}{56}$ অংশ হইবে ; রাস্তাটি কত চওড়া হইবে ?

12. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 20 ফুট, 16 ফুট এবং 14 ফুট; উহাতে 6 ফুট × 3 ফুট একটি দরজা এবং 5 ফুট × 3 ফুট দুইটি জানালা আছে। উহার দেওয়াল রঙ করিতে যদি প্রতি বর্গফুটে 25 পয়সা এবং "সিলিং' রঙ করিতে প্রতি বর্গফুটে 30 পয়সা লাগে তবে মোট কত খরচ পড়িবে ?

13. পার্শ্বের চিত্রে দেখানো বাক্সটির বাহির দিকে রঙ করিতে কত পরিমাণ ক্ষেত্র রঙ করিতে হইবে ?



14. কোন সিঁড়ির একটি ধাপের উচ্চতা 8 ইঞ্চি, দৈর্ঘ্য 5 ফুট এবং প্রস্থ 12 ইঞ্চি ; উহার মাঝামাঝি বরাবর 3 ফুট চওড়া কার্পেট দ্বারা আবৃত করা হইল। পার্শ্বের চিত্র হইতে বল :




(i) কত ফুট কার্পেট লাগিবে ?

(ii) কত পরিমাণ স্থান অনাবৃত থাকিবে ?

15. 100 মি. × 80 মি. জমির উপর এমন একটি নক্সা অঙ্কন কর যাহাতে :

(i) চতুর্দিকে 3 মি. চওড়া জমি ছাড়িয়া দিতে হইবে,

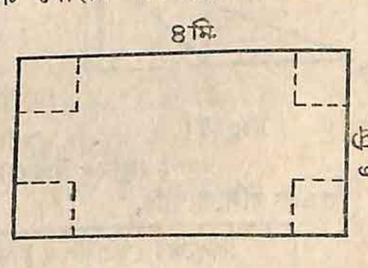
(ii) বারান্দা এবং বাগানের জন্য 1410 ব. মিটার পরিমাণ স্থান থাকিবে,

(iii) 59 মি. × 40 মি. মাপের দুইটি ঘর থাকিবে,

(iv) 14 মি. × 9 মি. একটি প্যাসেজ থাকিবে,

(v) বাকি স্থানে স্নানঘর ও রান্নাঘর থাকিবে।

16. 8 মি. × 6 মি মাপের একটি লোহার আয়তাকার পাতের চারি কোণ হইতে কত পরিমাণ পাত কাটিয়া বাদ দিলে একটি ঢাকনা-বিহীন 1·5 মি. উচ্চতাবিশিষ্ট বাক্স নির্মাণ করা সম্ভব হইতে পারে ? ঐ বাক্সের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল কত হইবে ?




## V. ত্রিভুজ

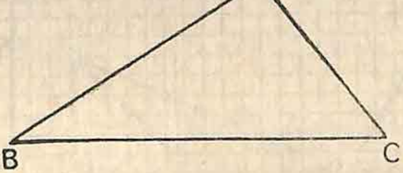



Fig. 73

Δ ABC-এর

∠A-এর বিপরীত বাহুকে সাধারণতঃ $a$ দ্বারা,

∠B-এর বিপরীত বাহুকে সাধারণতঃ $b$ দ্বারা এবং
∠C ,, ,, ,, ,, $c$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

**পরিসীমা** : △ABC-এর পরিসীমা $= AB + BC + CA = (a+b+c)$ একক।
স্থতরাং

| ত্রিভুজের পরিসীমা = বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি |
|---|

$\frac{1}{2}(a+b+c)$ এই পরিমাণ দৈর্ঘ্যকে ত্রিভুজের **অর্ধ পরিসীমা** বলি। ইহাকে সাধারণতঃ $s$ দ্বারা চিহ্নিত করি। অর্থাৎ

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

### (A) ভূমি ও উচ্চতার সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

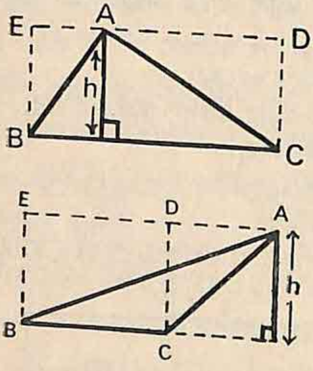



Fig. 74

ধর, ত্রিভুজ ABC-এবং আয়তক্ষেত্র EDCB একই ভূমি BC ও একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত। স্থতরাং বলা যাইতে পারে, এইস্থলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের পরিমাণের অর্ধেকের সমান হইবে।

অতএব, △ABC-এর ক্ষেত্রফল
$=(\frac{1}{2}$EBCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল )
$=\frac{1}{2}(BC \times CD)$ বর্গ একক
$=\frac{1}{2}(BC \times h)$ বর্গ একক
[ মনে কর, ত্রিভুজের উচ্চতা $h$ একক, অর্থাৎ আয়তক্ষেত্রের একটি বাহু $h$ একক ]
$=\frac{1}{2}$ (ভূমি × উচ্চতা) বর্গ একক।

স্থতরাং বলিতে পারি,

| ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা, বর্গ একক |
|---|

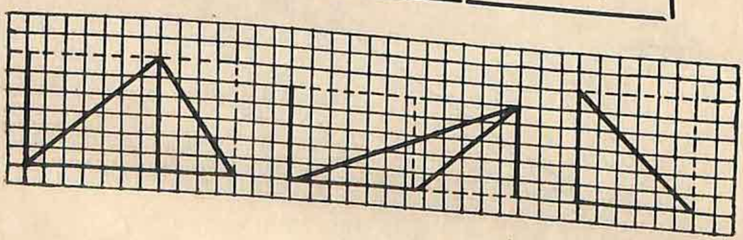
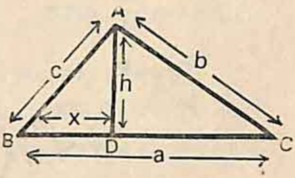


Fig. 75

উপরের চিত্র হইতে উপরোক্ত স্থত্রের সত্যতা প্রমাণ করিয়া দেখ।

## (B) তিনটি বাহুর সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয়

মনে কর, $\triangle$ ABC-এর উচ্চতা $AD = h$
সুতরাং, সমকোণী ত্রিভুজের বাহুর ধর্ম হইতে পাই :




$$AB^2 - BD^2 = AD^2 = AC^2 - DC^2,$$

Fig. 76

বা, $c^2 - x^2 = h^2 = b^2 - (a-x)^2$, [ ধর, $BD = x$ ]

বা, $c^2 - x^2 = h^2 = b^2 - x^2 - a^2 + 2ax$,

সুতরাং, $c^2 = b^2 - a^2 + 2ax$,

অর্থাৎ $x = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$

অতএব, $h^2 = c^2 - \left(\dfrac{a^2 - b^2 + c}{2a}\right)^2$

$$= \frac{1}{4a^2}(4a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - 2a^2c^2)$$

অর্থাৎ $h = \dfrac{1}{2a}\sqrt{(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$

আমরা জানি $\triangle$ABC-এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} . a \dfrac{1}{2a}\sqrt{(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{\{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2\}}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)\ (2ab - a^2 - b^2 + c^2)}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{\{(a+b)^2 - c^2\}\{c^2 - (a-b)^2\}}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\ (a+b-c)\ (c+a-b)\ (c-a+b)}$

$= \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c) . \frac{1}{2}(b+c-a) . \frac{1}{2}(c+a-b) . {}^1(a+b-c)}$

$= \sqrt{s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$ বর্গ একক,

সুতরাং বলিতে পারি :

| ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$ |
|---|

**উদাহরণ :**

একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, উহার উচ্চতা কত হইবে ?

**সমাধান :** মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য $= a$ একক।

$\therefore \quad s = \frac{3a}{2}$ একক

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2} - a\right)^3}$

$$= \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{3a^4}{2^4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2 \text{ বর্গ একক।}$$

আবার আমরা জানি,

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = \frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2} \cdot a \times$ উচ্চতা

$\therefore$ উচ্চতা $= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$ একক

## প্রশ্নমালা 2

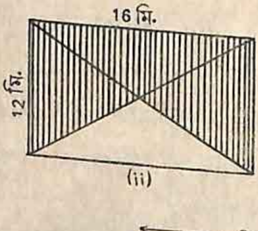
1. নিম্নের * চিহ্নিত স্থানগুলি পূরণ কর :

| ত্রিভুজের | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ভূমি | 6 সে. মি. | 3 মি. | 5 ফু. | * | অন্য দুইটি বাহুর সমান | 1 মি. 5 সে.মি. | * |
| উচ্চতা | 4 সে. মি. | $1\frac{7}{8}$ মি. | * | 110 ই. | * | 50 সে.মি. | $\frac{\sqrt{3}}{2}$.5 ফু. |
| ক্ষেত্রফল | 12 ব. সে. মি. | * | 18 ব. ফু. | $19\frac{7}{72}$ ব. ফু. | $4\sqrt{3}$ ব.মি. | * | $\frac{25}{2}\sqrt{3}$ ব. ফু. |

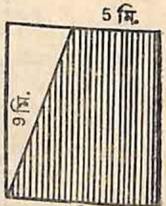
2. নিম্নের রেখাঙ্কিত স্থানগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :



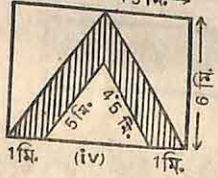
(i)



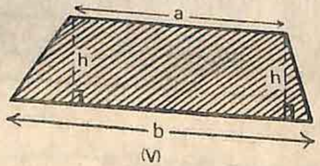
(ii)



8 মি. (iii)



1মি. (iv) 1মি.

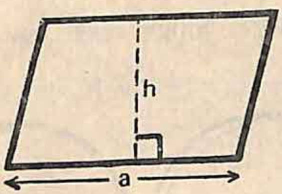


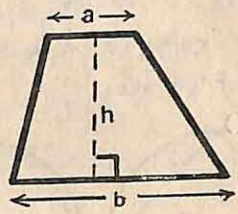
(V)

3. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের সংলগ্ন বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 20 ফুট এবং 15 ফুট, উহার অতিভুজের দৈর্ঘ্য এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

4. একটি পোতাশ্রয় হইতে দুইটি জাহাজ যথাক্রমে দক্ষিণ-পূর্ব দিকে ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে এবং দক্ষিণ-পশ্চিম দিকে ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে চলিতে সুরু করিল। 5 ঘন্টা পরে উহাদের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

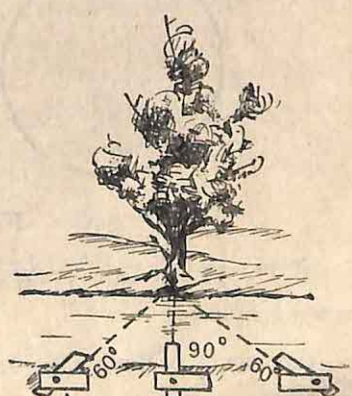
5. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সাহায্যে সামান্তরিক এবং ট্রাপিজিয়মটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।




6. একটি মাঠে তিনটি বৈদ্যুতিক পোষ্ট $E_1$, $E_2$ এবং $E_3$ আছে। $E_1$ এবং $E_2$-এর মধ্যে দূরত্ব 35 মিটার, $E_2$ এবং $E_3$-এর মধ্যে দূরত্ব 33 মিটার, $E_3$ এবং $E_1$-এর মধ্যে দূরত্ব 42 মিটার। তাহা হইলে $E_1E_2$ সরলরেখা হইতে $E_3$-এর দূরত্ব কত ?

7. পার্শ্বের চিত্র হইতে নদীর প্রস্থ নির্ণয় কর যখন AB দূরত্ব 400 মিটারের সমান।




8. '$a$' বাহুবিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ দ্বারা গঠিত একটি সুষম ষড়ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

## VI. বৃত্ত :

মনে কর, ABC বৃত্তটির কেন্দ্র O এবং উহার ব্যাসার্ধ $=r$.

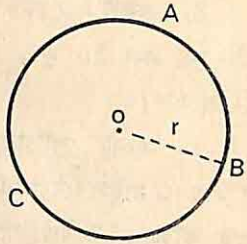



Fig. 77

A. **পরিধি :** বৃত্তের পরিসীমাকে পরিধি বলা হয়। সুতরাং বৃত্তের পরিধির উপর যে কোন বিন্দু, ধর, A হইতে শুরু করিয়া ঐ পরিধি বরাবর একবার পূর্ণ প্রদক্ষিণ করিয়া A বিন্দুতে আসিতে যতটা দূরত্ব অতিক্রান্ত হয় তাহাই পরিধির দৈর্ঘ্য।

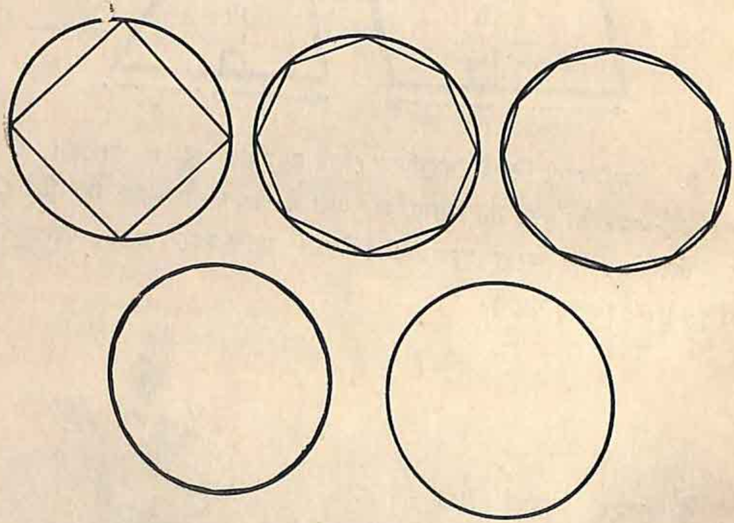


Fig. 78

উপরের বৃত্ত এবং উহাদের অন্তর্লিখিত বহুভুজগুলির পরিসীমা লক্ষ্য করিয়া আমরা বলিতে পারি :

(i) বৃত্তের পরিধিকে যদি অসংখ্য ( কল্পনায় অসীম সংখ্যক ) ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র চাপে বিভক্ত করিয়া উহার ভিতরে বহুভুজ অঙ্কন করা হয় তবে বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্যের পরিমাণ ঐ বহুভুজের পরিসীমার সহিত সমান হইবে,

এবং ঐ অবস্থায়, (ii) বৃত্তের ক্ষেত্রফল ঐ বহুভুজটির ক্ষেত্রফলের সমান।

**A. 1.** বৃত্তের পরিধি নির্ণয়ের পূর্বে প্রমাণ করিব যে :
"বৃত্তের পরিধি এবং ইহার ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক।"

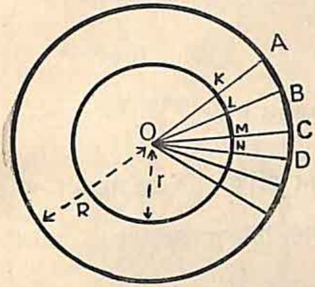



Fig. 79

মনে কর, O সমকেন্দ্রিক দুইটি বৃত্তের মধ্যে বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ R এবং অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r$।

কেন্দ্র O হইতে **অসংখ্য** সরলরেখা টান, মনে কর, উহারা বহির্বৃত্তকে A, B, C, D,...এবং অন্তর্বৃত্তকে K, L, M, N,...ইত্যাদি বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন সদৃশকোণী ত্রিভুজের ধর্ম হইতে পাই :

$$\frac{R}{r}=\frac{AB}{KL}=\frac{BC}{LM}=\frac{CD}{MN}=\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \frac{R}{r}=\frac{AB+BC+CD+\cdots\cdots}{KL+LM+MN+\cdots\cdots}$$

কিন্তু ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বিভাগের চরম অবস্থায়

$$AB=\widehat{AB},\ BC=\widehat{BD},\ CD=\widehat{CD}\cdots\cdots$$

এবং $$KL=\widehat{KL},\ LM=\widehat{LM},\ MN=\widehat{MN}$$

$\therefore$ ঐ চরম অবস্থায়,

$$AB+BC+CD+\cdots\cdots=\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CD}+\cdots\cdots$$
$$=\text{বহির্বৃত্তের পরিধি}$$

এবং $$KL+LM+MN+\cdots\cdots=\widehat{KL}+\widehat{LM}+\widehat{MN}+\cdots\cdots$$
$$=\text{অন্তর্বৃত্তের পরিধি}$$

কিন্তু R, $r$-এর মান অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং ঐ চরম অবস্থায় :

$$\frac{R}{r}=\frac{AB+BC+CD+\cdots\cdots}{KL+LM+MN+\cdots\cdots}=\frac{\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CD}+\cdots\cdots}{\widehat{KL}+\widehat{LM}+\widehat{MN}+\cdots\cdots}$$
$$=\frac{\text{বহির্বৃত্তের পরিধি}}{\text{অন্তর্বৃত্তের পরিধি}}$$

অর্থাৎ, $\frac{\text{বহির্বৃত্তের পরিধি}}{R}=\frac{\text{অন্তর্বৃত্তের পরিধি}}{r}$,

সুতরাং, $\frac{\text{বহির্বৃত্তের পরিধি}}{2R}=\frac{\text{অন্তর্বৃত্তের পরিধি}}{2r}$,

অতএব বলা যাইতে পারে

$$\frac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{\text{ব্যাস}}=\text{ধ্রুবক}।$$

পরীক্ষা দ্বারা দেখা গিয়াছে, এই ধ্রুবকটির মান প্রায় $\frac{22}{7}$-এর সমান। এই ধ্রুবকটিকে গ্রীক অক্ষর $\pi$ ( উচ্চারণ 'পাই' ) দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। আমরা $\pi$-এর পরিবর্তে $\frac{22}{7}$ বা 3·14 মানটি ব্যবহার করি।

**দ্রষ্টব্য :** আমরা যেন ভুল ধারণা না করি যে $\pi$ একটি মূলদ রাশি। ইহা একটি **অমেয়** রাশি। বাইশ দশমিক স্থান অবধি $\pi$-এর বিশুদ্ধ মান নির্ণয় করা সম্ভব হইয়াছে।

দেখা গেল, $\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}}=\pi$

অতএব, পরিধি $=\pi$ ব্যাস $=2\pi r$ একক, এখানে বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r$ ধরা হইয়াছে।

আমরা বলতে পারি :

| পরিধি $=\pi\times$ ব্যাস $=2\pi\times$ ব্যাসার্ধ |
|---|

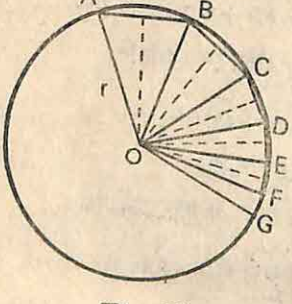



Fig. 80

পরিধির উপর A, B, C, D, E, F, G,... বিন্দুগুলি এইরূপে লও যেন :

AB > BC > CD > DE > EF > FG > ...ইত্যাদি হয়।

পূর্বে লক্ষ্য করিয়াছ, জ্যাগুলি যতই ক্ষুদ্রতর হয় ততই জ্যাগুলির দৈর্ঘ্য চাপের দৈর্ঘ্যের সমান হইবার উপক্রম হয়।

এই ক্ষেত্রে লক্ষ্য করিলে দেখিবে যে কেন্দ্র O-এর সহিত A, B, C, D, E, F, G,...ইত্যাদি যুক্ত করিয়া যে ত্রিভুজগুলি উৎপন্ন হয় তাহার ভূমি

যতই নিজ সংলগ্ন চাপের সমান হইবার উপক্রম হয় ততই ঐ ত্রিভুজের উচ্চতা ব্যাসার্ধের সমান হইবার উপক্রম হয়।

সুতরাং ঐরূপ ক্ষেত্রের ত্রিভুজের ভূমির ক্ষুদ্রতরের চরম অবস্থায় ত্রিভুজের উচ্চতা ব্যাসার্ধের সমান হইবে।

**ক্ষেত্রফল :** মনে কর, বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ $r$ একক।

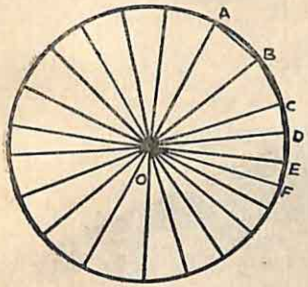



Fig. 81

পরিধির উপর অসংখ্য বিন্দু A, B, C, D, E, F,⋯ কল্পনা করা হইল যাহাতে চরম অবস্থায় $AB=\widehat{AB}$, $BC=\widehat{BC}$, $CD=\widehat{CD}$, $DE=\widehat{DE}$, $EF=\widehat{EF}$,⋯ কেন্দ্র O-এর সহিত A, B, C, D, E, F,⋯ এই অসংখ্য বিন্দুগুলি যুক্ত করিলে অসংখ্য ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে এবং এই ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফলের সমষ্টিই হইবে বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান। সুতরাং ঐ চরম অবস্থায় বৃত্তটির ক্ষেত্রফল = ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}.\ AB \times$ উচ্চতা $+\frac{1}{2}\ BC \times$ উচ্চতা $+\frac{1}{2}\ CD \times$ উচ্চতা $+\frac{1}{2}\ DE.$
$\times$ উচ্চতা $+\frac{1}{2}\ EF \times$ উচ্চতা $+\cdots$

$=\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DE+EF+\cdots)\times$ উচ্চতা

$={}^{1}(\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CD}+\widehat{DE}+\widehat{EF}+\cdots)\times r$

$=\frac{1}{2}\times$ পরিধি $\times r=\frac{1}{2}.2\pi r\times r=\pi r^2$ বর্গ একক।

সুতরাং বলিতে পারি

| বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi r^2=\pi\times$ (ব্যাসার্ধ)$^2$ |
|---|

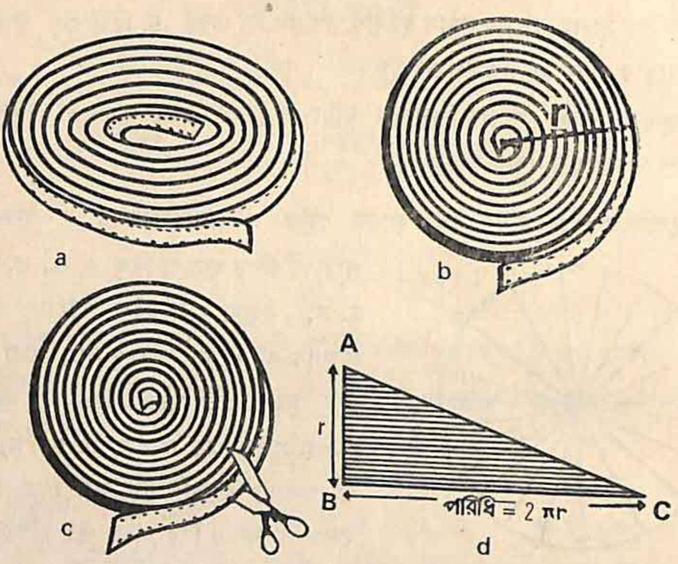



Fig. 82

তোমরা হাতে কলমে কোন বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে পার। একটি ফিল্ম-রীলের উপরিতলের বৃত্তকে কল্পনা কর।

এখন যদি উহার ব্যাসার্ধ ($r$) বরাবর কাটা যায় তাহা হইলে বাহির হইতে ভিতর দিকের প্রতিটি বৃত্তের পরিধি পৃথক হইয়া যাইবে এবং এই সমস্ত পরিধিকে সাজাইলে ত্রিভুজাকৃতি একটি ক্ষেত্র পাইবে। ইহা একটি সমকোণী '△' লক্ষ্য কর।

লক্ষ্য কর, ঐ ত্রিভুজের উপরিতলের ক্ষেত্রফল ফিল্ম-রীলের উপরিতল-বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান এবং ত্রিভুজটির উচ্চতা বৃত্তের ব্যাসার্ধের এবং ভূমির বহির্বৃত্তের পরিধির সমান।

সুতরাং এইক্ষেত্রে, $r$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল

= △ABC-এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}.2\pi r.r$

$= \pi r^2$ বর্গ একক

**উদাহরণ :** একটি 58″ × 28″ পাত হইতে উভয়দিকে ঢাকনাসহ 14″ ব্যাসবিশিষ্ট একটি 28″ লম্বা গোলাকার চোঙ্ তৈয়ারী করিলে কত পরিমাণ পাত ব্যবহৃত হইবে না তাহা নির্ণয় কর।

**সমাধান :** পাতটির ক্ষেত্রফল $= 58 \times 28$ ব. ই. $= 1624$ ব. ই.

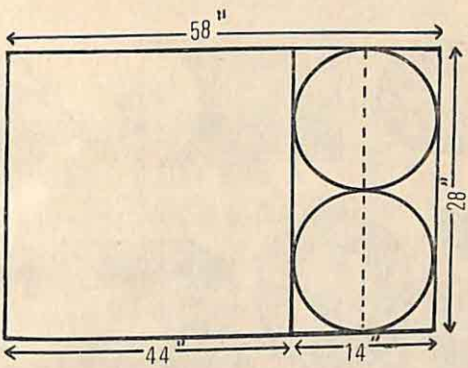



Fig. 83

ঢাকনা দুইটির ক্ষেত্রফল $= 2\left\{\frac{22}{7} \times \left(\frac{14}{2}\right)^2\right\} = 2 \times 154$ ব. ই.

$= 308$ ব. ই.

ঢাকনার পরিধি $= 2 . \frac{22}{7} . \frac{14}{2} = 44$ ই.

$\therefore$ ঢাকনা ছাড়াও 44 ই. $\times$ 28 ই. পরিমাণ পাতের প্রয়োজন হইবে পার্শ্বতলের জন্য এবং উহার ক্ষেত্রফল $= 44 \times 28$ ব. ই. $= 1232$ ব. ই. ;

$\therefore$ চোঙটির জন্য প্রয়োজন মোট পাতের পরিমাণ $= 308 + 1232$ ব. ই.

$= 1540$ ব. ই.

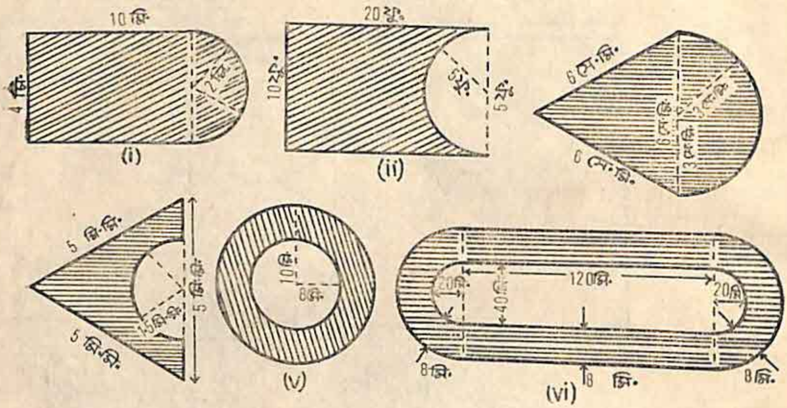
$\therefore$ অব্যবহৃত পাতের পরিমাণ $= 1624 - 1540$ ব. ই. $= 84$ ব. ই.

## প্রশ্নমালা 3.

1. নিম্নের * চিহ্নিত স্থানগুলি পূরণ কর :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| বৃত্তের | ব্যাসার্ধ | 7 ফু | * | * | * | 5 কি. মি. | * |
| | পরিধি | * | 88 সে. মি. | * | $\frac{220}{21}$ গজ | * | * |
| | ক্ষেত্রফল | * | * | $\frac{198}{7}$ ব. মি. | * | * | $6\frac{4}{25}$ ব. মাইল |

2. নিম্নের রেখাঙ্কিত স্থানগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :




3. উপরে (i), (ii), (iii) এবং (iv) নং ক্ষেত্রের পরিসীমা নির্ণয় কর।

4. একটি বিমানের চাকার ব্যাস $1\frac{1}{2}$ মিটার। মাটিতে বিমানটি নামিয়া রানওয়েতে 1250 মিটার দৌড়াইলে বিমানের চাকা কত পাক খায় তাহা দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মানে প্রকাশ কর।

5. 1 সে. মি. পুরু ধাতুর পাত দ্বারা নির্মিত একটি নলের বাহির হইতে ব্যাস 8 সে. মি. হইলে ঐ নলের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল কত ?

6. 16 মিটার ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার স্থানে ফোয়ারার বাহিরে চতুর্দিকে 5 মিটার চওড়া স্থানে প্রতি বর্গ মিটার 5 টা. হিসাবে বাঁধাইতে কত খরচ পড়িবে ?

7. 8 মিটার চওড়া একটি বৃত্তাকার পথের অন্তর্বৃত্তের পরিধি 484 মিটার। রাস্তাটি প্রতি বর্গ মিটার 1·75 টাকা হিসাবে পাথর দিয়া বাঁধাইতে কত খরচ হইবে ?

8. একটি চোঙাকৃতি গ্যাস চেম্বারের উচ্চতা 42 মি. এবং ব্যাসার্ধ 7 মি., উহার পার্শ্বতল স্টীলের পাত দ্বারা নির্মিত। গ্যাস চেম্বারটির পার্শ্বতলের জন্য 12 মি. × 7 মি. মাপের স্টীল পাত কমপক্ষে কয়টি প্রয়োজন হইবে ?

9. 14 মিটার ব্যাসবিশিষ্ট একটি কূপের ভিতর দিকে পাকা করিতে প্রতি বর্গ মিটার 5 পয়সা হিসাবে মোট 220 টাকা খরচ পড়িলে, কূপটির গভীরতা নির্ণয় কর।

## উত্তরমালা 1.

1. 80 মি., 12 ফু., 18 ব. গজ, 6 কি. মি., 5 কি. মি. 6 মি.,
2. (i) 38·86 ব. সে. মি., (ii) 59 ব. সে. মি., (iii) 27 ব. ই., (iv) 213 ব. মি., (v) 9 ব. মি., (vi) 60 ব. মি., (vii) 66 ব. ফু.,
3. (i) 265 ব. মি., (ii) 215 ব. মি., (iii) 16 ব. ডেকা মি., (iv) 2 হেক্টার 94 আর, (v) 72 হেক্টার 61 আর 92 ব. মি.,
4. 808 মি., 5. 80টি আসন বসাইয়া কিছু স্থান খালি থাকিবে,
6. 5500 ব. মি., 7. (i) 378 টা., (ii) 3888 মেট্রিক টন,
8. 3016·25 কি. গ্রা., 1206·50 টা.,
9. 20টি, 10. 264 ব. ফুট, কমপক্ষে 132টি টালির প্রয়োজন,
11. 10 ফুট, 12. 336টা.,
13. $2(ab+bc+ca+xy+yz)$ বর্গ একক পরিমাণ স্থান,
14. (i) $6\frac{2}{3}$ ফুট, (ii) $13\frac{1}{3}$ ব. ফুট,
16. 9 ব. মি., 39 ব. মি.।

## উত্তরমালা 2.

1. $2\frac{1}{4}$ ব. মি., $7\frac{1}{5}$ ফু., 55 ই., $2\sqrt{3}$ মি., $26\frac{1}{4}$ ব. ডেসি মি., 10 ফু.,
2. (i) $6(250-\sqrt{11})$ ব. ডেসি মি., (ii) 144 ব. মি., (iii) 58·5 ব. মি. (iv) $\frac{15}{16}(32-15\sqrt{119})$ ব. মি., (v) $\frac{1}{2}(a+b).h$ ব. একক,
3. 25 ফুট, 150 ব. ফুট, 4. 50 মাইল,
5. সামান্তরিক : $a \times h$ ব. একক, ট্রাপিজিয়ম : $\frac{1}{2}(a+b)\times h$ ব. একক,
6. $\frac{44\sqrt{26}}{7}$ মি., 7. $200\sqrt{3}$ মি., 8. $\frac{3\sqrt{3}}{2}.a^2$ ব. একক,

## উত্তরমালা 3.

1. 44 ফু., 154 ব. ফু., 14 সে. মি., 616 ব. সে. মি., 3 মি., $18\frac{6}{7}$ মি., $1\frac{2}{3}$ গজ, $8\frac{46}{63}$ ব. গজ, $31\frac{3}{7}$ কি. মি., $78\frac{4}{7}$ ব. কি. মি., $1\frac{2}{5}$ মাইল, $8\frac{4}{5}$ মাইল,

2. (i) $46\frac{2}{7}$ ব. মি., (ii) $60\frac{2}{7}$ ব. ফুট, (iii) $\frac{9}{7}(44+7\sqrt{3})$ ব. সে. মি., (iv) $\frac{1}{28}(175\sqrt{3}-99)$ ব. মি. মি., (v) $41\frac{5}{7}$ ব. মি., (vi) $3126\frac{6}{7}$ ব. মি.,

3. (i) $30\frac{2}{7}$ মি., (ii) $65\frac{5}{7}$ ফু., (iii) $21\frac{3}{7}$ সে. মি., (iv) $16\frac{5}{7}$ মি. মি.,

4. 198·86 ( আসন্ন ), 5. 22 ব. সে. মি., 6. 330 টা.,

7. 7128 টা., 8. 22টি, 9. 100 মি.

# শুদ্ধিপত্র

## বিশেষভাবে শিক্ষক-শিক্ষিকাদের জন্য

পৃষ্ঠা

3—5 1. জ্যামিতিক উপপাদ্য প্রমাণের পদ্ধতি ; 2. সর্বসমতা ও সমতা

14 ব্লকের বাঁ ধারে 'অসমান্তরাল বাহুগুলি সমান ও সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম'।

36 নীচে থেকে উপরে 3য় লাইন 'প্রত্যক্ষ অভিজ্ঞতা হইতে'

## বিশেষভাবে অগ্রণী ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য

52 অনুশীলনী 15—17

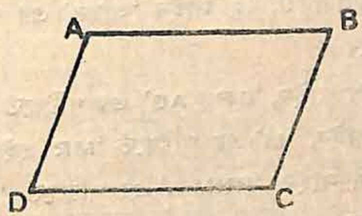
## ত্রুটি সংশোধন

3—5 ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য বাদ যাবে।

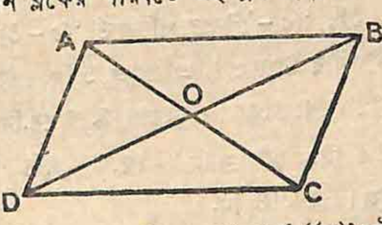
8 নীচে থেকে উপরে 8ম লাইন, 'সমান' এর পরিবর্তে 'সর্বসম হইবে।

16 Fig. 22, ডান ধারে 'O বিন্দুতে' বাদ যাইবে।

18 বর্তমান উপরে বাঁ ধারের ব্লকের পরিবর্তে এই ব্লক হইবে :




19 বর্তমান ব্লকের পরিবর্তে এই ব্লক হইবে :




22 8ম লাইন, 'কোন ত্রিভুজের' পূর্বে '(*a*)' হইবে।

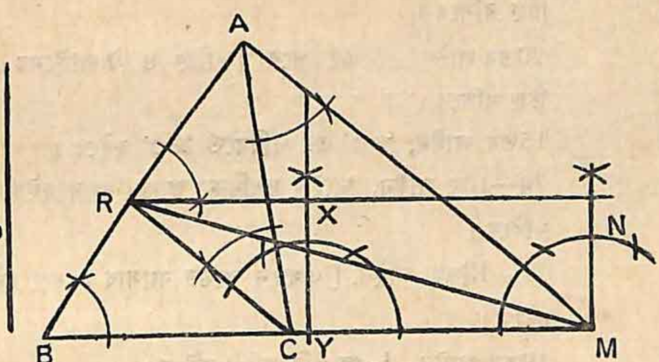
23 5ম লাইন, 'BF + FC = BC' এর পরিবর্তে 'BF + FC ≃ BC' হইবে।

## শুদ্ধিপত্র

| পৃষ্ঠা | |
|---|---|
| 23 | 7ম লাইন বাদ যাইবে। |
| ,, | 8ম লাইন, 'বিপরীতক্রমে' এর পরিবর্তে '($b$)' হইবে। |
| 24 | 6ষ্ঠ লাইন—8ম লাইন; '=' চিহ্নগুলির পরিবর্তে '$\simeq$' চিহ্নগুলি হইবে। |
| ,, | 9ম লাইন বাদ যাইবে। |
| 25 | অনুশীলনী 11—13, 43 পৃষ্ঠার অনুশীলনী 12 এর পর হইতে 13—15 হিসাবে গণ্য হইবে। |
| 28 | 4র্থ লাইন 'QP' এর পরিবর্তে 'IP' হইবে। |
| ,, | 10ম লাইন, 'বাহু-কোণ-বাহু' এর পরিবর্তে 'C সমকোণ-বাহু-অতিভুজ' হইবে। |
| ,, | 17তম লাইনটি 29 পৃষ্ঠার অনুশীলনীর পূর্বে বসিবে। |
| 39 | 19তম লাইন, '$AF = DF$' এর পরিবর্তে '$AE \simeq DF$' হইবে। |
| 40 | 5ম লাইন '$AE = DF$' এর পরিবর্তে '$AE \simeq DF$' হইবে। |
| 43 | অনুশীলনী 9, 1ম লাইন 'আয়ত' এর পরিবর্তে 'আয়তক্ষেত্র' হইবে। |
| ,, | ঐ 2য় লাইন, '$BP \parallel AG$' এর পরিবর্তে '$BF \parallel AG$' হইবে। |
| 46 | 9ম লাইন, 'M'-এর পরিবর্তে 'MR' হইবে। |
| ,, | 16তম লাইন 'RNM...'-এর পরিবর্তে '$\Delta RNM \simeq \Delta SON$' হইবে। |
| 47 | Fig. 53, '$(c-)^2$'-এর পরিবর্তে '$(c-b)^2$' হইবে। |
| 50-52 | অনুশীলনীর উত্তর : 1. অতিভুজ, 5 মি. ; উচ্চতা 1.4 মি.। 3. 32′। 4. 130′। 6. 14′। 7. 4 সে.মি.। 10. 159 সে.মি. 11. 4 মি. 90 সে.মি.। 12. $2\sqrt{85}$ কি.মি.। 13. 65 মাইল। 14.48 মি.। |
| 51 | অনুশীলনী 9, 1ম লাইন, 'AC'-এর পরিবর্তে 'BC' হইবে। |
| 52 | অনুশীলনী 15—17 বাদ যাইবে। |
| 54 | 7ম লাইন '='-এর পরিবর্তে '$\simeq$' চিহ্ন বসিবে। |

পৃষ্ঠা

54 বর্তমান ব্লকের পরিবর্তে এই ব্লক হইবে :




54 9ম—10ম লাইন, যাহা আছে তাহার পরিবর্তে 'কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এমন একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর, যাহার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য একটি নির্দিষ্ট রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমান হইবে।'

59 নীচে থেকে 12তম লাইন, 'পরিমাণ স্থানকে' এর পরিবর্তে 'স্থানের পরিমাণকে' হইবে।

65 8ম—9ম লাইন,

'দৈর্ঘ্য AB = DC = $x$ একক,

'প্রস্থ BC = AD = $y$ একক,' হইবে।

66 ছকের মধ্যে 2য় লাইন 5ম সারি, '1.1 ফু.' এর পরিবর্তে '1.2 ফু' হইবে।

" ঐ " 6ষ্ঠ সারি, '95 5' এর পরিবর্তে '95·5' হইবে।

70 6ষ্ঠ—7ম লাইন, 'ত্রিভুজের অর্ধ পরিসীমা বলি। ইহাকে' পর্যন্ত বাদ যাইবে।

71 10ম লাইন, $h^2 = c^2 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{2a}$ হইবে।

" 17তম লাইন '$\sqrt{}$' এর পরে '{' চিহ্ন ও ঐ লাইনের শেষে '}' চিহ্ন বসিবে।

# শুদ্ধিপত্র

| পৃষ্ঠা | |
|---|---|
| 71 | 19তম লাইন ' /' এর পরে '{' চিহ্ন ও ঐ লাইনের শেষে '}' চিহ্ন বসিবে। |
| ,, | 20তম লাইন /' এর পরে '{' চিহ্ন ও ঐ লাইনের শেষে '}' চিহ্ন বসিবে। |
| 75 | 15তম লাইন, 'BD' এর পরিবর্তে 'BC' হইবে। |
| 76 | 7ম—10ম লাইন, 'বাইশ দশমিক স্থান···সম্ভব হইয়াছে' বাদ যাইবে। |
| ,, | 12—13তম লাইন, [ এখানে বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r$ ধরা হইয়াছে ] হইবে। |
| 77 | 19তম লাইন, $^1$-এর পরিবর্তে $\frac{1}{2}$ হইবে। |
| 78 | শেষ লাইন, 'না' বাদ যাইবে। |

এ. আই. এম. টি.



# মাধ্যমিক জ্যামিতি

নবম শ্রেণীর জন্য

ম্যাকমিলান